

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

24. Band, Heft 4

28. Juni 1941

S. 145—192

Algebra und Zahlentheorie.

Polynome:

Mignosi, Giuseppe: Sul teorema fondamentale dell'algebra nell'algebra classica e nell'algebra moderna. *Esercitazioni Mat.* 13, 28—47 (1941).

Zusammenstellung funktionentheoretischer und algebraischer Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra. Verf. beginnt mit den vier Gaußschen Beweisen, von denen er den dritten ausführt (ohne seine Identität mit dem auf dem Prinzip vom Argument beruhenden zu bemerken), läßt den Cauchyschen, auf dem Minimumprinzip für $|f(z)|$ gründenden, folgen und wendet sich dann zu den funktionentheoretischen Beweisen (Liouville und ein Beweis von van der Waerden). Der zweite Teil ist den Gesichtspunkten der modernen Algebra gewidmet, also der algebraischen Konstruktion von Zerfällungskörpern, den Beweisen von Artin-Schreier und Dörge und der Theorie der formal-reellen abgeschlossenen Körper (im wesentlichen nach van der Waerden, *Moderne Algebra I*, 1937; dies. Zbl. 16, 339). *Harald Geppert.*

Brewer, B. W.: A criterion for solvability by radicals. *Amer. J. Math.* 63, 119—126 (1941).

Es handelt sich um die Aufstellung einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Auflösbarkeit einer Gleichung durch Radikale über einem beliebigen Grundkörper K von der Charakteristik p . Das Polynom $f(x)$ heißt auflösbar durch Radikale, wenn es eine Körperkette $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_s$ gibt, so daß K_s alle Wurzeln von $f(x)$ enthält und K_i aus K_{i-1} durch Adjunktion einer Wurzel einer irreduziblen, reinen Gleichung vom Primzahlgrad entsteht. Ein vorbereitender Satz gibt an, wie man den Grad der irreduziblen Faktoren eines Kreisteilungspolynoms $g_n(x)$ finden kann, wenn der Grad des maximalen, absolut algebraischen Unterkörpers von K gegeben ist. Ist nun G die Galoissche Gruppe von $f(x)$ und n deren Ordnung, so lautet das verlangte Kriterium so: G soll auflösbar sein, die Charakteristik p von K darf nicht in n aufgehen, und die Kreisteilungspolynome $g_d(x)$, gebildet für alle Primteiler d von n , sollen durch Radikale auflösbar sein. Auf diese $g_d(x)$ kann man dasselbe Kriterium wieder anwenden und kommt so zu einer rekursiven Bestimmung derjenigen Primzahlen d , für die $g_d(x)$ durch Radikale auflösbar ist. Zum Schluß wird noch angegeben, wie der Körper K beschaffen sein muß, damit alle Kreisteilungspolynome durch Radikale auflösbar seien. *van der Waerden (Leipzig).*

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Murdoch, David C., and Oystein Ore: On generalized rings. *Amer. J. Math.* 63, 73—86 (1941).

Unter einem „verallgemeinerten Ring“ verstehen die Verff. ein Elementsystem \mathfrak{R} , in dem zwei „Addition“ und „Multiplikation“ genannte Operationen eindeutig definiert und allgemein ausführbar sind, wobei \mathfrak{R} hinsichtlich der Addition eine (kommutative oder nichtkommutative) Gruppe bildet. Eine invariante Untergruppe α von \mathfrak{R} heißt Linksideal (Rechtsideal), wenn α gleichzeitig mit a stets auch $b \cdot a$ ($a \cdot b$) für beliebiges $b \in \mathfrak{R}$ enthält. Es wird eine Reihe von z. T. ziemlich komplizierten „Assoziativgesetzen“, „Distributivgesetzen“ und „Normalitätsbedingungen“ für die Multiplikation aufgestellt, aus denen gefolgert werden kann: a) daß die Menge aller Linksideale (Rechtsideale) einen Dedekindschen Verband hinsichtlich der Bildung von kleinstem gemeinschaftlichen Oberideal und größtem gemeinschaftlichen Unterideal darstellt, b) daß der Restklassenring \mathfrak{R}/α für jedes zweiseitige Ideal α definierbar ist, c) daß

für Idealprodukt und Idealquotient bei sachgemäßer Einführung die gleichen elementaren Formeln gelten wie in der gewöhnlichen Idealtheorie. — Die gewonnenen Ergebnisse gestatten eine bemerkenswerte Anwendung. Definiert man in einer beliebigen, nichtkommutativen Gruppe \mathfrak{R} mit der Addition als Grundverknüpfung die Multiplikation durch Kommutatorbildung ($a \cdot b = a + b - a - b$), so wird \mathfrak{R} zu einem verallgemeinerten Ring mit den invarianten Untergruppen als einzigen, durchweg zweiseitigen Idealen, und es zeigt sich, daß alle von den Verff. aufgestellten Bedingungen für die sinnvolle Entwicklung einer Idealtheorie erfüllt sind, obwohl die Multiplikation der Gruppenelemente im üblichen Sinne weder assoziativ noch distributiv ist. *Krull*.

Baer, Reinhold: A Galois theory of linear systems over commutative fields. *Amer. J. Math.* **62**, 551—588 (1940).

Unter einem „linearen System“ versteht Verf. eine additive Abelsche Gruppe \mathfrak{L} mit einem kommutativen Körper \mathfrak{F} als Multiplikatorenbereich. Ein Automorphismus θ von \mathfrak{L} gilt dann und nur dann als zulässig, wenn er eindeutig einen Automorphismus H von \mathfrak{F} induziert, derart, daß $\theta \times (a \cdot \alpha) = (H \times a) \cdot (\theta \times \alpha)$ wird für jedes Paar $a \in \mathfrak{F}$, $\alpha \in \mathfrak{L}$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{I}(G_0)$ bzw. $G(\mathfrak{I}_0)$ das Invariantensystem einer gegebenen Automorphismengruppe G_0 von \mathfrak{L} bzw. die größte Automorphismengruppe von \mathfrak{L} , die ein gegebenes Untersystem \mathfrak{I}_0 elementweise fest läßt, so handelt es sich in erster Linie um Aufstellung von Bedingungen dafür, daß $G(\mathfrak{I}(G_0)) = G_0$ bzw. $\mathfrak{I}(G(\mathfrak{I}_0)) = \mathfrak{I}_0$ wird. Das wichtigste Beweishilfsmittel bildet dabei die Überlegung, daß jede Automorphismengruppe G von \mathfrak{L} eine Automorphismengruppe G' von \mathfrak{F} induziert, und daß man auf den Aufbau von \mathfrak{F} über dem Invariantenkörper \mathfrak{F} von G' die bekannten Sätze der gewöhnlichen Galoisschen Theorie anwenden kann. Eines der wichtigsten Ergebnisse lautet: Für eine endliche Gruppe G_0 ist dann und im wesentlichen auch nur dann $G(\mathfrak{I}(G_0)) = G_0$, wenn kein nichtidentischer Automorphismus aus G_0 den identischen Automorphismus von \mathfrak{F} induziert. Auch für die Gültigkeit der Gleichung $\mathfrak{I}(G(\mathfrak{I}_0)) = \mathfrak{I}_0$ werden bei endlichem $G(\mathfrak{I}_0)$ einfache, notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt. Ein Vorzug der Baerschen Theorie liegt darin, daß die gewonnenen Ergebnisse unter einer naheliegenden Zusatzvoraussetzung über die Automorphismen von \mathfrak{L} leicht auf den Fall unendlicher Automorphismengruppen ausgedehnt werden können. Was die Anwendungen angeht, so werden die Möglichkeiten, daß \mathfrak{L} einen nichtkommutativen Ring oder einen nichtkommutativen Körper darstellt, näher untersucht. — Eine Sonderstellung nimmt der letzte Abschnitt ein, in dem die Elemente einer Theorie der Kreuzprodukte nichtkommutativer Körper mit endlichen Automorphismengruppen entwickelt werden. Die bekannten Hauptsätze über Kreuzprodukte lassen sich leicht übertragen. — Die Baersche Arbeit überkreuzt sich inhaltlich vielfach mit einer 1940 erschienenen Arbeit von N. Jacobson (dies Zbl. **22**, 304). Doch sind die „kommutativen“ Baerschen Beweismethoden, die die gewöhnliche Galoissche Theorie als bekannt voraussetzen, von den „nichtkommutativen“ Methoden Jacobsons wesentlich verschieden. Auch enthält keine der beiden Arbeiten die sämtlichen Ergebnisse der andern.

Krull (Bonn).

Zahlkörper:

Albert, A. A.: On p -adic fields and rational division algebras. *Ann. of Math.*, II. s. **41**, 674—693 (1940).

Rein algebraische Theorie der p -adischen Zahlkörper und gewisse Existenztheoreme der zyklischen Zerfällungskörper der rationalen Divisionsalgebren. Es sei k der p -adische Zahlkörper mit \mathfrak{p}/p , e die Verzweigungsordnung der endlichen Erweiterung K von k . Der Fall $(e, p) = 1$ gestattet eine sehr durchsichtige Behandlung. Es werden alle Oberkörper K mit $(e, p) = 1$ konstruiert, die Bedingung dafür angegeben, daß K galoisch sei, und die galoissche Gruppe bestimmt. Insbesondere folgt der interessante Satz 10: Wenn ein Körper K mit $(e, p) = 1$ abelsch ist, so sind alle Erweiterungen mit derselben Verzweigungsordnung e abelsch. Ferner wird, durch Einführung des Begriffes

„type number“, die direkte Faktorzerlegung des abelschen Körpers in zwei zyklische Körper diskutiert. Die Auflösbarkeit der galoisschen Gruppe und die Endlichkeit der Anzahl der Erweiterungskörper gegebenen Grades werden neu bewiesen. In der zweiten Hälfte der Abhandlung löst Verf. das folgende Problem: Es sei D eine normale Divisionsalgebra vom Grade m über dem algebraischen Zahlkörper K und k ein Unterkörper von K . Wann existiert ein zyklischer Körper Z/k vom Grade m derart, daß D von ZK zerfällt wird? Das ist sicher der Fall, wenn $(K:k)$ prim zu m ist.

T. Tannaka (Sendai).

Zahlentheorie:

Bruijn, N. G. de: Eine Konstruktion k -dimensionaler magischer Würfel. *Mathematica*, Zutphen B 9, 149—151 (1941) [Holländisch].

Analog dem magischen Quadrat von n Reihen und n Spalten in der Ebene definiert Verf. einen k -dimensionalen magischen Würfel der Ordnung n . Jede Stelle in diesem k -dimensionalen Schema ist durch k aus den Zahlen $0, 1, 2, \dots, n-1$ gewählte und in eine bestimmte Reihenfolge gebrachte Zahlen a_1, a_2, \dots, a_k bestimmt. Es wird gefragt, ob es möglich ist, jeder solchen Reihenfolge, d. h. jeder Stelle in dem Würfelschema, eine der natürlichen Zahlen $1, 2, \dots, n^k$, die mit $G(a_1, a_2, \dots, a_k)$ bezeichnet wird, derart zuzuordnen, daß A. jede natürliche Zahl $\leq n^k$ genau einmal unter den Zahlen G vorkommt und B. für jedes i ($1 \leq i \leq k$) die Summe $\sum_{a_i=0}^{n-1} G(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_k)$

denselben Wert besitzt. Diese Summation ist so zu verstehen: Alle in der Klammer vorkommenden a_i außer dem an i -ter Stelle stehenden a_i bleiben konstant, dieses Glied a_i aber durchläuft die Werte $0, 1, 2, \dots, n-1$. Verf. gibt eine Konstruktion eines solchen magischen Würfels an für den Fall, daß k eine beliebige und n eine ungerade natürliche Zahl (> 1) ist. — Ref. weist darauf hin, daß der Fall $k=3$ laut H. Schubert, *Mathematische Mußestunden*, 4. Aufl., neubearb. von F. Fitting (1924), S. 157—159, seit Kochanski (1686) mehrfach behandelt worden ist. Zacharias.

Aucoin, A. A.: Solution of a quartic diophantine equation. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 20, 17—21 (1941).

Es werden die Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$(ax + by)(x + py)[x^2 + nxy + p(n-p)y^2] = (cu + dv)(u + pv)[u^2 + nuv + p(n-p)v^2]$$

mit elementaren Methoden ermittelt. Hofreiter (Wien).

Hua, Loo-Keng, and Szu-Hoa Min: On the number of solutions of certain congruences. *Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Kunming A* 4, 113—133 (1940).

Es seien $k \geq 3$, $s \geq 2$, $r > 0$, n, g, a ganz, $n_r = [2^{-r}k]$; für $k > 3$ sei m die größte Zahl der Gestalt 2^r oder $3 \cdot 2^r$, die $\leq k$ ist; für $k=3$ sei $m=8/3$. Weiter sei p eine Primzahl, $f(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$ (a_0, \dots, a_{k-1} ganz), $e(x) = e^{2\pi i x/p}$, $S(af(x)) = \sum_{x=1}^p e(af(x))$, $T(s) = T(s, f(x)) = \sum_{a=1}^{p-1} |S(af(x))|^s$; $N(s, p, n)$ sei die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $f(x_1) + \dots + f(x_s) \equiv n \pmod{p}$, $0 < x_r \leq p$; man bekommt sofort $|N(s, p, n) - p^{s-1}T(s)| \leq p^{-1}T(s)$. Im Anschluß an die Methoden von Mordell (dies. Zbl. 5, 246) und Davenport (dies. Zbl. 6, 295) werden einige Abschätzungen für S, T, N bewiesen. Über T ergibt sich folgendes (wobei ich zur Abkürzung $\text{Ord}(t)$ statt $O(p^t)$ schreibe; das Zeichen O bezieht sich auf wachsendes p und gilt — bei festen k, s — gleichmäßig in bezug auf a_0, \dots, a_{k-1}):

$$T(s) = \text{Ord}\left(s - \frac{s-2}{m}\right) \quad \text{für } s \geq 3; \quad T(s) = \text{Ord}\left(s - \frac{s-2}{k-1}\right)$$

für $2 \leq s \leq 2k$. Für $k \geq 6$, $s \geq 3$ gilt endlich

$$T(s) = \text{Ord}\left(s - \frac{s-2}{2^r n_r - 1}\right) \quad \text{für } s \leq 2^{r+1} n_r,$$

$$T(s) = \text{Ord}\left(s - 2 - \frac{s - 2^{r+1} n_r}{m}\right) \quad \text{für } s > 2^{r+1} n_r;$$

dabei ist $r = 1$ zu setzen für $k \leq 11$, während für $k > 11$ die Zahl r so zu wählen ist, daß $n_r = 3$ oder 4 oder 5 ist. — Der Beweis von Lemma 9 muß etwas anders geführt werden; wegen Lemma 10 vgl. Davenport, Lemma 1, wo ein verwandter Satz gründlicher bewiesen wird. Auf S. 131 ersetze man die Summation über y_3, \dots, y_r nicht durch „Max“, da man nachher noch über a summieren muß, und das Wertsystem y_3, \dots, y_r , welches das Maximum liefert, von a abhängen kann. — Eine Anzahl von Druckfehlern, namentlich in den Exponenten. Jarník (Prag).

Hartman, Philip, and Richard Kershner: On upper limit relations for number theoretical functions. Amer. J. Math. 62, 780—786 (1940).

Verf. beweisen zunächst den folgenden Satz: Es sei $\{r_n\}$ eine Folge ganzer Zahlen derart, daß $0 < r_n < r_{n+1}$, $r_n \rightarrow \infty$ bei $n \rightarrow \infty$. $f(x)$ sei eine solche (reelle) arithmetische Funktion, daß 1) $f(r_n) : f(r_{n+1}) \rightarrow 1$ bei $n \rightarrow \infty$ und 2) für alle $x \leq r_n$ und jedes $\delta > 0$ $f(x) \leq (1 + \delta)f(r_n)$, falls $n > N = N(\delta)$. Ferner sei $g(x)$ eine nichtzunehmende Funktion derart, daß $f(r_n)g(r_n) \rightarrow 1$ bei $n \rightarrow \infty$. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup f(x)g(x) = 1$. — Dieser Satz läßt sich ganz einfach erledigen. Hieraus kann man aber die maximale Größenordnung einiger arithmetischer Funktionen herleiten: z. B. die Landausche minimale Größenordnung der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$, die Gronwallische maximale Größenordnung der Summe der Potenzen aller Teiler von n , und auch die Wigertsche maximale Größenordnung der Anzahl der Teiler von n . Z. Suetuna (Tokyo).

Weyl, Hermann: Theory of reduction for arithmetical equivalence. Trans. Amer. Math. Soc. 48, 126—164 (1940).

Die Abhandlung bringt vielfach bekannte Sätze aus der Geometrie der Zahlen in neuer Darstellung. In dem n -dimensionalen Vektorraum, dessen Elemente n -Tupeln $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_n)$ von reellen Zahlen sind, werde ein Gitter L von Vektoren mit ganzzahligen Komponenten x_i betrachtet. Die Gesamtheit der unimodularen Transformationen $x = x'S$ bildet eine Gruppe (Modulgruppe). Es sei ferner im Vektorraum eine reellwertige Maßfunktion $f(x_1, \dots, x_n)$ gegeben. Die n Einheitsvektoren $e_k = \vec{OE}_k = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ von L erzeugen das Grundparallelepiped, dessen Inhalt mit V bezeichnet werde. Es sei $\mathfrak{d}_1 = \vec{OD}_1$ der kleinste Gittervektor (\mathfrak{d}_1 heißt 1. Minimum). Ferner sei $\mathfrak{d}_2 = \vec{OD}_2$ 2. Minimum (D_2 liegt nicht auf der Geraden durch O, D_1) usw., $\mathfrak{d}_k = \vec{OD}_k$ k -tes Minimum. Es sei $f(\mathfrak{d}_k) = M_k$. Dann ist $M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_n$, und es gilt $M_1 M_2 \dots M_n V \leq 2^n$ (Ungleichung von Minkowski). Unter der Reduktion des Gitters L versteht man die Aufgabe, eine Gitterbasis zu finden, die hinsichtlich f möglichst einfach ist. Es ist naheliegend, mit den ersten n Minima zu arbeiten. Das geht in der Ebene und im R_3 , denn die ersten zwei bzw. drei Minima erzeugen ein Parallelepiped, das mit dem Grundparallelepiped gleichen Inhalt hat. Für $n \geq 4$ brauchen aber die ersten n Minima dies nicht mehr zu tun und sind daher als Basis nicht allgemein zu gebrauchen. Verf. gibt daher eine andere Definition. Ein n -Tupel von ganzen Zahlen (x_1, \dots, x_n) soll zur Menge X_k gehören, wenn $(x_k, \dots, x_n) = 1$. Die Basis $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n$ von L heißt reduziert bezüglich f , wenn die Ungleichung $f(x_1 \mathfrak{z}_1 + \dots + x_n \mathfrak{z}_n) \geq f(\mathfrak{z}_k)$ für jedes $k = 1, \dots, n$ und jedes (x_1, \dots, x_n) von X_k gilt. Diese Definition kann mehr algebraisch mit Hilfe des Begriffes „primitive Adjunktion“ ausgesprochen werden. Für jede Maßfunktion f existiert eine reduzierte Gitterbasis $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_n$. Es sei $f(\mathfrak{z}_k) = L_k$. Dann gilt die Ungleichung von Mahler: $L_k \leq \theta_k M_k$ (θ_k unabhängig von f). Ferner gilt $L_1 L_2 \dots L_n V \leq \mu_n 2^n$ mit $\mu_n = \theta_1 \dots \theta_n$. Diese und weitere Sätze lassen sich auf Gitter mit komplexen Zahlen und Quaternionen übertragen. Die Verallgemeinerung bietet keine besondere Schwierigkeit, wenn die Zahlen imaginär-quadratischen Körpern angehören, in denen der euklidische Algorithmus gilt, bzw. sie gewöhnliche Quaternionen sind. Die allgemeine Theorie wird im 2. Abschnitt auf quadratische Formen, Hermitesche und Hamiltonsche Formen angewandt. Eine positive quadratische Form $f = \sum g_{ij} x_i x_j$ heißt reduziert, wenn

$f(x_1, \dots, x_n) \geq g_{kk}$ für jeden Vektor (x_1, \dots, x_n) aus X_k ($k = 1, \dots, n$) gilt. Eine quadratische Form f mit n Variablen ist durch ihre reellen symmetrischen Koeffizienten $g_{ij} = g_{ji}$ charakterisiert. Die Gesamtheit der quadratischen Formen bildet einen linearen Raum R von $N = \frac{1}{2}n(n+1)$ Dimensionen. Die positiven Formen bilden einen Teilraum G . Darin bilden die reduzierten Formen wieder einen Teilraum Z (reduzierter Raum, auch Basiszelle genannt). Mit einfachen topologischen Überlegungen erkennt man, daß die Basiszelle Z nur von endlich vielen $(N-1)$ -dimensionalen Ebenen begrenzt ist. Wendet man die Substitutionen S der Modulgruppe auf die Basiszelle an, so erhält man äquivalente Zellen Z_S , die den ganzen Raum G einfach und lückenlos ausfüllen. Z grenzt nur an endlich viele Zellen Z_S an. Diese Tatsache wird hier allgemeiner bewiesen. Wir bezeichnen mit X_k^0 die Menge der Gittervektoren (x_1, \dots, x_n) , für die $x_k = 1, x_{k+1} = 0, \dots, x_n = 0$. Es sei $G(\varrho, \sigma)$ ($\varrho \geq 1, \sigma \geq 0$) jener Teil aus G , der durch die folgenden Ungleichungen

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq \frac{1}{\varrho^2} \text{ für jeden Vektor } (x_1, \dots, x_n) \text{ aus } X_k,$$

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq g_{kk} - \sigma g_{11} \text{ für jeden Vektor } (x_1, \dots, x_n) \text{ aus } X_k^0 \\ (k = 1, \dots, n)$$

definiert ist. Es ist $Z = G(1, 0)$. Die Menge $G(\varrho, \sigma)$ hat nur mit endlich vielen Zellen Z_S Punkte gemeinsam. Während Minkowski die Lagrangeschen Transformationen (Transformation auf eine Summe von Quadraten) benutzte, werden hier allgemeinere Überlegungen angestellt, die für beliebige Maßfunktionen gelten. Es ergeben sich noch einige weitere Sätze über die Ausfüllung des Raumes G mit Zellen Z_S . Die Modulgruppe hat endliche Basis. Als Erzeugende können neben den Substitutionen, die nur Vorzeichen wechseln, jene Substitutionen gewählt werden, die Z in die benachbarten Zellen Z_S überführen. Hofreiter (Wien).

Lehmer, D. H.: The lattice points of an n -dimensional tetrahedron. Duke math. J. 7, 341—353 (1940).

Es sei $n \geq 1$ ganz. $N_n(\lambda) = N_n(\lambda; \omega_1, \dots, \omega_n)$ für $\omega_i > 0, \lambda \geq 0$ sei die Anzahl der ganzzahligen, nichtnegativen Lösungen (x_1, \dots, x_n) der Ungleichung

$$\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n \leq \lambda.$$

Von den Bernoullischen Polynomen ausgehend, konstruiert der Verf. durch vollständige Induktion nach n die Polynome n -ten Grades $P_n(\lambda), Q_n(\lambda)$, die nur von ω_i abhängige Koeffizienten besitzen und die für alle $\lambda \geq 0$ die Ungleichung $P_n(\lambda) < N_n(\lambda) < Q_n(\lambda)$ erfüllen. Der Verf. zeigt, daß in einigen Fällen die Polynome $P_n(\lambda), Q_n(\lambda)$ die Funktion $N_n(\lambda)$ gut approximieren. Vl. Knichal (Prag).

Gruppentheorie.

Baer, Reinhold: Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 800—806 (1940).

Eine abelsche Gruppe G mit der Eigenschaft $G = nG$ (d. h. zu jedem g aus G gibt es ein g' aus G mit $g = ng'$) für jede positive ganze Zahl n ist bekanntlich direkter Summand jeder abelschen Gruppe H , die G als Untergruppe enthält. Verf. verallgemeinert diese Bedingung auf abelsche Gruppen mit Operatorenring und zeigt, daß die so verallgemeinerte Bedingung nicht nur ein hinreichendes, sondern auch ein notwendiges Kriterium darstellt. Es wird darüber hinaus gezeigt, daß jede abelsche Gruppe G mit Operatoren in eine solche eingebettet werden kann, die obiger Bedingung genügt, und daß eine derartige „Abschließung“ \bar{H} von G immer so gewählt werden kann, daß sie isomorph ist einer Untergruppe einer beliebigen Abschließung von G . Ulm.

Suetuna, Zyoiti: Über die sich selbst assoziierten Charaktere der symmetrischen Gruppe. J. reine angew. Math. 183, 92—97 (1941).

Es werden die Anzahl und Gestalt der sich selbst assoziierten Charaktere der

symmetrischen Gruppe S_n angegeben; die Gestalt derselben wird rekursiv ermittelt. Ulm (Münster i. W.).

Fuchs-Rabinowitsch, D. I.: Beispiel einer diskreten Gruppe mit endlichvielen Erzeugenden und Relationen, die kein vollständiges System der linearen Darstellungen zuläßt. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 29, 549—550 (1940).

Verallgemeinerung des früheren Satzes (siehe dies. Zbl. 23, 212) auf Körper beliebiger Charakteristik. J. J. Burckhardt (Zürich).

Coxeter, H. S. M.: The binary polyhedral groups, and other generalizations of the quaternion group. Duke math. J. 7, 367—379 (1940).

In Verallgemeinerung der Quaternionengruppe werden die durch $R^l = S^m = T^n = RST$ definierten und mit $\langle l, m, n \rangle$ bezeichneten Gruppen untersucht. Die Faktorgruppe nach dem von $Z = RST$ erzeugten Normalteiler ist die bekannte Polyedergruppe (l, m, n) . Ist daher $|l|^{-1} + |m|^{-1} + |n|^{-1} \leq 1$, so ist $\langle l, m, n \rangle$ eine unendliche Gruppe. Als endliche Gruppen treten daher auf $\langle \pm 2, \pm 2, n \rangle$, $\langle \pm 2, \pm 3, \pm 3 \rangle$, $\langle \pm 2, \pm 3, \pm 4 \rangle$, $\langle \pm 2, \pm 3, \pm 5 \rangle$. Verf. beweist, daß für diese die Ordnung von Z gleich $|l|^{-1} + |m|^{-1} + |n|^{-1} \cdot g$ mit $g = 2(|l|^{-1} + |m|^{-1} + |n|^{-1} - 1)^{-1}$ ist, was mit Hilfe von geometrischen Darstellungen der Quaternionengruppe gelingt. J. J. Burckhardt (Zürich).

Campaigne, Howard: Partition hypergroups. Amer. J. Math. 62, 599—612 (1940).

Es seien G eine Gruppe und a, b Untermengen von G . Das Symbol \equiv bedeute eine Äquivalenzrelation in G . Die Menge der Elemente ab ($a \in a, b \in b$) heißt das Produkt von a und b . a heißt charakteristisch, wenn aus $a' \equiv a$ und $a \in a$ folgt $a' \in a$. Das Symbol \equiv heißt eine Konjugation, wenn das Produkt charakteristischer Untermengen charakteristisch ist. Die Klassen konjugierter Elemente bilden dann eine Hypergruppe H , so daß die charakteristischen Untergruppen von G und die Unterhypergruppen von H isomorphe Verbände bilden. — An einem Beispiel wird gezeigt, daß nicht alle Hypergruppen durch Konjugationen in Gruppen entstehen. Lorenzen.

Griffin, Harriet: The abelian quasi-group. Amer. J. Math. 62, 725—737 (1940).

Verf. untersucht im Anschluß an Hausmann und Ore (dies. Zbl. 17, 391) abelsche Quasigruppen — in einer Quasigruppe wird gegenüber der Gruppe i. a. auf das Assoziativgesetz verzichtet; insbesondere werden die Unterschiede der Theorie der abelschen Quasigruppen gegenüber der Theorie der abelschen Gruppen hervorgehoben. Beziehungen zur Theorie der Verbände werden herausgestellt. Ulm.

Garrison, G. N.: Quasi-groups. Ann. of Math., II. s. 41, 474—487 (1940).

Unter einer Quasigruppe \mathfrak{G} wird ein Gruppoid mit beiderseitiger Division verstanden, so daß also für $a, b \in \mathfrak{G}$ die beiden Gleichungen $ax = b, ya = b$ in \mathfrak{G} eindeutig lösbar sind. Der Verf. beschränkt seine Untersuchungen auf endliche Quasigruppen. Es werden im allgemeinen Untermengen in \mathfrak{G} betrachtet, die durch gewisse assoziative oder kommutative Eigenschaften gekennzeichnet sind, wie z. B. die Untermengen aller Elemente $x \in \mathfrak{G}$, für die je eine der folgenden Beziehungen besteht, und zwar für alle $a, b \in \mathfrak{G}$: $a(xb) = (ax)b$, $x(ab) = (xa)b$, $(ab)x = a(bx)$. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Betrachtung der sog. invarianten Komplexe, d. h. der nichtleeren Untermengen $H \subset \mathfrak{G}$ mit folgender Eigenschaft: Zu je zwei Elementen $a, b \in \mathfrak{G}$ gibt es ein weiteres Element $c \in \mathfrak{G}$, so daß $(Ha)(Hb) = Hc$. Ein solcher Komplex erzeugt eine Zerlegung von \mathfrak{G} in disjunkte Untermengen Ha_1, Ha_2, \dots, Ha_m , und das Produkt $(Ha_i)(Ha_j)$ von zwei beliebigen Elementen dieser Zerlegung ist wieder ein Element Ha_k der Zerlegung. Die Zerlegung samt dieser Multiplikation $(Ha_i)(Ha_j) = Ha_k$ bildet eine endliche Quasigruppe, die sog. Quotientenquasigruppe. Der Begriff der Quotientenquasigruppe spielt in bezug auf homomorphe Abbildungen von Quasigruppen eine ähnliche Rolle wie der Begriff der Faktorgruppe in der Gruppentheorie. — Bemerkung des Ref.: Der Begriff der Quotientenquasigruppe ist dem vom Ref. für allgemeine Gruppoid definierten Begriffe eines Faktoroides untergeordnet, und die Theorie der homomorphen Abbildungen und noch viel mehr kann allgemeiner für Gruppoide ohne jede einschränkende Voraussetzung entwickelt werden. O. Borůvka.

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Pospíšil, Bedřich: Eine Bemerkung über vollständige Räume. Čas. mat. fys. **70**, 38—41 (1940).

Verf. fragt nach hinreichenden Bedingungen, unter denen ein vollständiger (d. h. mit einer G_δ -Menge eines bikompakten Hausdorffschen Raumes homöomorpher) Raum R folgende Eigenschaft (Z) hat: Ist F eine F_σ -Menge $\subset R$ und kann jede auf F definierte, beschränkte, stetige Funktion auf ganz R fortgesetzt werden, so ist F in R abgeschlossen. Verf. zeigt, daß jede der beiden folgenden Bedingungen hinreichend ist: 1) R ist vollständig normal, 2) die Mächtigkeit von R ist kleiner als die Mächtigkeit der Menge aller Mengen von reellen Zahlen.

Nöbeling (Erlangen).

Kametani, Shunji: A converse of Lebesgue's density theorem. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 350—353 (1940).

Verf. kehrt den Satz von Lebesgue über die Dichte meßbarer Mengen um, indem er beweist: Wenn die minimale Dichte der ebenen Menge E in fast allen Punkten der Komplementärmenge von E Null ist, so ist E meßbar (die minimale Dichte von E in einem Punkte x ist die untere Grenze des Verhältnisses $\frac{m_\sigma(\varepsilon \cdot Q)}{mQ}$ bei nach Null strebendem Durchmesser von Q , wo Q ein achsenparalleles Quadrat ist, das x enthält). Das Resultat gilt auch in Räumen von einer oder mehr Dimensionen. Aus diesem Satz wird u. a. gefolgert: Eine Funktion $f(x)$, die in einer meßbaren Menge A definiert und dort endlich ist, ist dann und nur dann meßbar, wenn nach Vorgabe eines beliebigen $\varepsilon > 0$ in fast allen Punkten y von A die minimale Dichte der Menge der Punkte x , für die $f(x) \geq f(y) + \varepsilon$ ist, verschwindet.

G. Scorza Dragoni.

Bochner, S.: Finitely additive integral. Ann. of Math., II. s. **41**, 495—504 (1940).

In the Freudenthal's realization theory of vector lattices the conditional σ -completeness is assumed. The object of this paper is to drop this condition by suitable change of axioms. — Let L be a vector lattice with unit 1 such that $t \in L$ implies the existence of real numbers p, q with $p \cdot 1 \leq t \leq q \cdot 1$. $L = L_M$ is called a field if a functional M is defined on L and satisfies the following conditions (f, g, f_n, g_n are in L and a, b, \dots are real numbers): (I) $M(af + bg) = aMf + bMg$, (II) $f > 0$ implies $Mf > 0$, (III) $M1 = 1$. Further $L = L_M$ is called a complete field if L is a field and (IV) $f_n \geq f_{n+1}$, $g_{n+1} \geq g_n$, $f_m \geq g_n$ for all m and n and $\lim Mf_n = \lim Mg_n$ imply the existence of $h \in L$ such that $f_m \geq h \geq g_n$ for all m and n . Author proves that for any field C_M there exists the smallest complete field containing C_M . — Let $B = B_v$ be a Boolean algebra with Jordan volume, that is (E, E_n, E'_n, \dots) are in B , and $+$ and \cdot are the operations of Boolean algebra) a functional v , which is defined on B and satisfies the following conditions: (I) $v0 = 0$, $vB = 1$, (II) $E > 0$ implies $vE > 0$, (III) $E_1 \cdot E_2 = 0$ implies $v(E_1 + E_2) = v(E_1) + v(E_2)$. $B = B_v$ is called a complete field if B is a Boolean algebra with Jordan volume and (IV) $E_n \geq E_{n+1}$, $E'_{n+1} \geq E'_n$, $E_m \geq E'_n$ for all m and n , $\lim vE_m = \lim vE'_n$ imply the existence and uniqueness of $E \in B$ such that $E_m \geq E \geq E'_n$ for all m and n . In this field we can define the Riemann-integrable function-class R and its subclass R_0 [see Bochner, Ann. of Math., II. s. **40**, 769—799 (1939); this Zbl. **24**, 42]. The author proves that for any complete field L_M , there is a complete field B_v such that $L_M \subset R_0$ set-theoretically and $Mf = \int f dv$ for $f \in L_M$.

Izumi (Sendai).

Denjoy, Arnaud: Totalisation des séries. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 825—828 (1939).

Es handelt sich um eine zusammenfassende Darstellung eines neuen Summationsverfahrens für Reihen. Verf. schickt eine passende Definition der Totalvariation einer in einem Intervall \overline{ab} definierten Funktion, die höchstens Unstetigkeiten erster Art besitzt, auf einer allgemeinen perfekten Menge dieses Intervalls voraus. Im offenen Intervall $\overline{01}$ sei irgendeine abzählbare Punktmenge ϑ_n ($n = 1, 2, \dots$) vorgegeben.

Irgendeine Folge von reellen Zahlen u_n , die ebenso wie die ϑ_n geordnet gedacht wird, heißt einfach totalisierbar, wenn es eine Funktion $f(\vartheta)$ gibt, die für jedes von den ϑ_n verschiedene ϑ in $\overline{01}$ definiert und stetig ist und überdies die folgende Bedingung erfüllt: Für jedes n existieren die Grenzwerte $f(\vartheta_n - 0)$, $f(\vartheta_n + 0)$ mit $f(\vartheta_n + 0) - f(\vartheta_n - 0) = u_n$, ebenso wie auch die endlichen Grenzwerte $f(+0)$, $f(1 - 0)$ existieren. Jede perfekte Punktmenge aus $\overline{01}$ enthält eine Teilmenge P' , auf der die Gesamtschwankung von $f(\vartheta)$ definiert und gleich der über die in P' gelegenen Punkte ϑ_n erstreckten Summe der absoluten Sprünge $|f(\vartheta_n + 0) - f(\vartheta_n - 0)|$ ist. Verf. behandelt weiter die Folgerungen aus dieser Eigenschaft, die Art, wie die Schwankung $f(1 - 0) - f(+0)$, die, wenn sie existiert, eindeutig ist, berechnet werden kann; diese Schwankung heißt das Total der Reihe und wird mit dem Symbol $\sum T u_n$ bezeichnet; weiter bespricht Verf. die begriffliche Verwandtschaft mit der Theorie der Totalisation von Funktionen.

Tullio Viola (Roma).

Analysis.

Allgemeines:

● Picone, Mauro: *Analisi superiore*. Roma: V. Ferri 1938. 405 S.

Ionescu, D. V.: Sur une équation aux différences finies. C. R. Inst. Sci. Roum. 4, 227—230 (1940).

Die Rücklaufformel

$$(z - y)P_{i,k} + (y - x)P_{i,k-1} + (x - z)P_{i-1,k} = 0,$$

$i, k = 0, 1, \dots$ wird allgemein gelöst unter der Annahme, daß

$$P_{i,0} = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{n+p-i-\nu}{p-i} \binom{i+\nu-\mu}{i} x^{n-\nu} y^{\nu-\mu} z^{\mu},$$

$$P_{0,k} = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{n+p-k-\nu}{p-k} \binom{k+\nu-\mu}{k} x^{n-\nu} y^{\mu} z^{\nu-\mu},$$

spezielle Formen n -ten Grades seien; p ist eine positive ganze Zahl. Die allgemeine Lösung $P_{i,k}$ ist ebenfalls eine Form n -ten Grades

$$P_{i,k} = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{n+p-i-k-\nu}{p-i-k} \binom{i+\nu-\mu}{i} \binom{k+\mu}{k} x^{n-\nu} y^{\nu-\mu} z^{\mu}.$$

Harald Geppert (Berlin).

Bottema, O.: Über den Schwarzschen Differentialausdruck. *Mathematica, Zutphen* B 9, 146—148 (1941).

Für den Schwarzschen Differentialausdruck $S(y) = y''' y'^{-1} - \frac{3}{2} y''^2 y'^{-2}$ entwickelt Verf. eine neue Deutung. Es sei $D(x)$ das Doppelverhältnis der vier verschiedenen Abszissen x_1, x_2, x_3, x_4 , $D(y)$ das der zugehörigen Ordinaten $y_1 \dots y_4$. Läßt man dann die $x_i \rightarrow x$ ($i = 1 \dots 4$) gehen, so ist

$$\lim_{D(x)} \frac{D(y)}{D(x)} = 1, \quad \lim \left\{ \left[\frac{D(y)}{D(x)} - 1 \right] : (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) \right\} = \frac{1}{6} S(y).$$

Beim Beweis wird $y'(x) \neq 0$ angenommen. Aus dieser Deutung folgt unmittelbar, 1) daß $S(y)$ genau dann identisch verschwindet, wenn $y = (ax + b)/(cx + d)$ ist; 2) daß für $y_2(x) = (ay_1(x) + b)/(cy_1(x) + d)$, $ad - bc \neq 0$ gilt $S(y_2) = S(y_1)$.

Harald Geppert (Berlin).

Orthogonalpolynome:

Lancaster, Otis E.: Orthogonal polynomials defined by difference equations. *Amer. J. Math.* 63, 185—207 (1941).

Ist $p(x)\Delta_h x = \Delta_h q(x)$, so wird die Operation $\overset{\nu}{S}$ durch $\overset{\nu}{S} p(x)\Delta_h x = q(\nu) - q(\mu)$

erklärt; eine Folge von Funktionen $\{\varphi_\lambda(x)\}$ heißt S -orthogonal im Intervall $[\mu, \nu]$ mit der Gewichtsfunktion $g(x)$, wenn

$$\int_{\mu}^{\nu} \varphi_{\lambda_1}(x) \varphi_{\lambda_2}(x) g(x) \Delta_h(x) = 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Die beiden Differenzengleichungen gerader Ordnung

$$\sum_{\alpha=0}^{2n} p_{\alpha}(x) y(x + (2n - \alpha)h) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha=0}^{2n} p_{\alpha}(x - nh + \alpha h) v(x + \alpha h) = 0$$

heißen L -adjungiert. Ist eine lineare, homogene Differenzengleichung mit ihrer L -adjungierten identisch, so ist sie L -selbstadjungiert. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist

$$p_i(x) = p_{2n-i}(x + nh - ih), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Jede lineare, homogene Differenzengleichung zweiter Ordnung kann in die Form einer L -selbstadjungierten Differenzengleichung gebracht werden. Gibt es eine Folge von Werten $\{\lambda_i\}$ und die entsprechenden Lösungen $y_i(x)$ der Differenzengleichung

$$\Delta_h[w(x) \Delta_h y(x)] + s(x) \lambda y(x + h) = 0,$$

die gewisse Randbedingungen erfüllen, so läßt sich zeigen, daß diese Funktionenfolge S -orthogonal in einem Intervall $[\mu + h, \nu + h]$ mit der Gewichtsfunktion $s(x - h)$ ist. Hat die Differentialgleichung

$$\sum_{\alpha=0}^n p_{\alpha}(x) y^{(\alpha)}(x) = 0 \quad (\alpha \leq \text{Grad des Polynoms } p_{\alpha}(x))$$

eine Polynomlösung, so hat auch die Differenzengleichung

$$p_n(x) \Delta_h^n y(x) + p_{n-1}(x) \Delta_h^{n-1} y(x) + \dots + p_0(x) y(x + j) = 0 \quad [j \text{ beliebige Konstante}]$$

eine Polynomlösung und umgekehrt; ist nur eine einzige derartige Lösung vorhanden, so haben beide Polynome denselben Grad. Die Polynomlösungen der Differenzengleichung

$$(ax^2 + bx + c) \Delta_h^2 y(x) + (dx + f) \Delta_h y(x) + \lambda y(x + h) = 0$$

lassen sich durch Differenzen darstellen. Diese Polynome erfüllen eine rekurrente Beziehung von der Form:

$$A(n) y_{n+2}(x) + [B(n) \cdot x + C(n)] y_{n+1}(x) + D(n) y_n(x) = 0.$$

Die entsprechenden Formeln werden für die vier Formen der Differenzengleichung zweiter Ordnung entwickelt. Die Frage der Nullstellen der Polynome wird behandelt und erkannt, daß es Polynome gibt, die nicht reelle Wurzeln besitzen. Als Beispiele werden Gegenstücke zu den Legendreschen, Hermiteschen, Laguerreschen und den Jacobischen Polynomen gezeigt. Schließlich werden die Ergebnisse des Grenzüberganges $h \rightarrow 0$ untersucht.

F. Knoll (Wien).

Szegő, G.: Remarks on a note of Mr. R. Wilson and on related subjects. Bull. Amer. Math. Soc. **46**, 852—858 (1940).

Sei $w(x) \geq 0$ eine in $(-1, 1)$ definierte Gewichtsfunktion. J. Chokhatte (Shohat) hat mit Hilfe der Theorie der Kettenbrüche bewiesen, daß, wenn $\{p_n(x)\}$, $p_n(x) = k_n x^n + \dots$ ($n = 1, 2, \dots$), die Folge der orthogonalen und normierten Polynome bez. der Gewichtsfunktion $w(x)$ ist, die beiden Beziehungen

$$(1) \quad 2^{-n} k_n = O(1), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} k_n \text{ existiert,}$$

äquivalent sind. Verf. beweist von neuem kurz diesen Satz und zeigt auch, daß die Beziehungen (1) mit der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-1}^1 \log w(x) (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

im Sinne von Lebesgue gleichwertig sind. — Verf. bemerkt, daß der neue Beweis von

R. Wilson (dies. Zbl. **20**, 212) für die Aussagen $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n^{\frac{1}{n}} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Max}_{-1 \leq x \leq 1} \{k_n^{-1} p_n(x)\}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$,

auch unter den dort benutzten einschränkenden Voraussetzungen eine Lücke aufweist, und gibt für diesen Satz einen sehr einfachen direkten Beweis. *Giovanni Sansone.*

Reihen:

Hurwitz jr., Henry: Total regularity of general transformations. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 833—837 (1940).

Es sei $y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) x_n$ eine reguläre Transformation der Folge x_n in die Funktion $y(t)$, d. h. aus $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ folge stets $y(t) \rightarrow x$ bei einer gewissen (festen) Bewegung der Variablen t , etwa bei $t \rightarrow +0$. Verf. fragt, wann diese Transformation total regulär ist, d. h. wann außerdem aus $x_n \rightarrow +\infty$ (x_n reell) auch stets $y(t) \rightarrow +\infty$ folgt, und findet, daß dazu bei reellem $a_n(t)$ außer den bekannten Regularitätsbedingungen das folgende System notwendiger und hinreichender Bedingungen erfüllt sein muß: (1) Für genügend kleines $t > 0$ ist $a_n(t)$ höchstens für endlich viele n negativ; (2) es gibt keine Folge t_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) mit $t_\nu \rightarrow +0$, so daß für jede positive ganze Zahl p $\limsup_{n \rightarrow \infty} G[a_{k_n}(t_n); p] \leq 0$ ist für eine geeignete, möglicherweise von p abhängige Folge k_1, k_2, \dots mit $k_n \rightarrow \infty$. Dabei soll $G[a_n(t); p]$ gleich $+1$ sein, wenn $a_n(t) \geq 0$ ist, und gleich $\text{Max}_{t'=t_1, \dots, t_p} a_n(t')/|a_n(t)|$, wenn $a_n(t) < 0$ ist. Verschiedene Modifikationen. — Notwendige und hinreichende Bedingungen für totale Regularität von Transformationen der Form $y_m = \sum_{n=1}^m a_{mn} x_n$ ($m = 1, 2, \dots$) hat W. A. Hurwitz [Proc. London Math. Soc. (2) 26, 231—248 (1927)] angegeben. *Meyer-König* (Stuttgart).

Fastperiodische Funktionen:

Szász, Otto: The jump of almost periodic functions and of Fourier integrals. Duke math. J. 7, 360—366 (1940).

Die vom Verf. kürzlich für periodische Funktionen $f(t)$ angegebene Methode der Sprungbestimmung aus den arithmetischen Mitteln der Teilsummen der zu $f(t)$ gehörigen konjugierten Fourierreihe [Duke math. J. 4, 401—407 (1938); dies. Zbl. 19, 15] wird auf Fourierreihen fastperiodischer Funktionen und auf Fourierintegrale erweitert. Unter der (unwesentlichen) Annahme, daß die Sprungbestimmung an der Stelle $t = 0$ erfolgt und $f(t)$ ungerade ist, lauten die Ergebnisse: (1) Es sei $f(t)$ eine reellwertige fastperiodische Funktion im Sinne von Besicovitch und $f(t) \sim \sum_1^{\infty} b_n \sin \lambda_n t$ ($\lambda_n > 0$) mit $b_n = \lim_{h \uparrow \infty} \frac{2}{h} \int_0^h f(t) \sin \lambda_n t dt$ ($n = 1, 2, \dots$) ihre verallgemeinerte Fourierreihe. Es gelte $\overline{\lim}_{h \uparrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)| dt < \infty$, so daß

$$P(\eta) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin 2\eta t \frac{\sin^2 \eta t}{\eta t^2} dt \sim \frac{1}{2\eta} \sum_{0 < \lambda_n \leq 2\eta} \lambda_n b_n + \sum_{2\eta < \lambda_n < 4\eta} \left(2 - \frac{\lambda_n}{2\eta}\right) b_n$$

absolut konvergiert. Bestehen dann für eine Zahl D die Beziehungen (a) $\int_0^h |f(t) - D| dt = O(h)$ für $h \downarrow 0$ und (b) $\int_0^h \{f(t) - D\} dt = o(h)$ für $h \downarrow 0$, so strebt $\frac{\pi}{4} P(\eta) \rightarrow D \log 2$ für $\eta \uparrow \infty$. — (2) Es sei $f(t) \in L^p(0, \infty)$ mit $1 \leq p \leq 2$ und $F(t)$ ihre Sinustransformation. Ferner sei $V(\lambda) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right) F(t) dt$ ($\lambda > 0$). Bestehen dann für eine Zahl D die beiden Beziehungen (a) und (b), so strebt $V(2\lambda) - V(\lambda) \rightarrow D \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \log 2$ für $\lambda \uparrow \infty$. *F. Lösch* (Rostock).

Hartman, Philip, and Aurel Wintner: On the standard deviations of additive arithmetical functions. Amer. J. Math. **62**, 743—752 (1940).

Es bezeichne $f(n)$ eine für natürliche n mit Hilfe der für teilerfremde n_1 und n_2 vorgeschriebenen Funktionalgleichung $f(n_1 n_2) = f(n_1) + f(n_2)$ durch $f(1) = 0$ und ihre Werte $f(p^k)$ für alle Primzahlpotenzen definierte additive Funktion. Eine von P. Erdős und A. Wintner [Amer. J. Math. **62**, 635—645 (1940); dies. Zbl. **24**, 16] gegebene Bedingung umwandelnd wird die überraschende Tatsache festgestellt, daß $f(n)$ dann und nur dann B^2 -fastperiodisch ist, falls das zweite Moment ihrer Verteilungsfunktion endlich und dann notwendig mit dem Mittelwert von f^2 , d. h. dem Grenzwert von $[f^2(1) + f^2(2) + \dots + f^2(n)]/n$ gleich ist. Der — auf konvergente unendliche Faltung von Verteilungsfunktionen und auf die, bei fastperiodischen Funktionen zur Gleichheit verschärfbare, Fatousche Relation gestützte — Beweis zeigt übrigens, daß die angegebene Momentenbedingung dann und nur dann erfüllt ist, wenn f eine asymptotische Verteilungsfunktion besitzt und der obere Mittelwert von f^2 , d. h. der obere Grenzwert des zuletzt angegebenen Mittels endlich ist. v. Stachó (Budapest)

Spezielle Funktionen:

Toscano, Letterio: Sul prodotto di due polinomi di Laguerre e di Hermite. Atti Accad. Italia, VII. s. **1**, 405—411 (1940).

Mit Hilfe der Potenzausdrücke für die abgeleiteten Laguerreschen Polynome ergibt sich eine Reihenentwicklung für ein Produkt zweier solcher Polynome nach Laguerreschen Polynomen. Insbesondere gelangt man auf diesem Wege zu einer Entwicklung eines einzelnen Laguerreschen Polynoms nach Laguerreschen Polynomen. Verf. erhält neue Entwicklungsformeln dieser Art, indem er von der Potenzreihenentwicklung der Besselschen Funktionen und der Gegenbauerschen Polynome sowie von der Gegenbauerschen Reihenentwicklung ausgeht. Insbesondere ergibt sich eine Reihenentwicklung eines Laguerreschen Polynoms nach Produkten zweier Laguerrescher Polynome. Hierauf wendet Verf. sich den Hermiteschen Polynomen zu und geht davon aus, daß diese als besondere Fälle Laguerrescher Polynome dargestellt werden können. Durch besondere Wahl der Indizes erhält Verf. die Entwicklungsformel von Howell-Erdélyi für ein Produkt zweier Laguerrescher Polynome. Diese Formel läßt sich mit Hilfe einiger Umformungen von Gammaausdrücken in eine andere Form bringen. Als Grenzformeln ergeben sich Entwicklungen Hermitescher Polynome nach Hermiteschen Polynomen. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Francotte, R.: Sur un moyen élémentaire d'établir les formules d'addition de la fonction elliptique $F(k, \varphi)$. Mathesis **54**, 110—114 (1940).

Ableitung der Formel für $\operatorname{sn}(u_1 + u_2)$. Sei $x = \operatorname{sn} u_1$ und $y = \operatorname{sn} u_2$, und man schreibe die Summe $u_1 + u_2$ als Summe der beiden elliptischen Normalintegrale 1. Gattung mit den oberen Grenzen x und y . Als Bedingung für die Konstanz dieser Summe bei veränderlichen x und y findet man dann zunächst eine Differentialgleichung zwischen x und y , die durch geschickte Rechnung integriert wird. Dann setzt man $x = \operatorname{sn} u_1$, $y = \operatorname{sn} u_2$ und bestimmt die auftretende Integrationskonstante, indem man u_1 durch Null, u_2 durch $u_1 + u_2$ ersetzt; dies ergibt die gewünschte Additionsformel. Lochs (Kennelbach).

Schneider, Theodor: Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale. J. reine angew. Math. **183**, 110—128 (1941).

Während schon 1882 für Eulers Γ -Funktion die Transzendenz des Zahlwertes $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ festgestellt wurde, kann erst jetzt, wie C. L. Siegel bemerkte, allgemeiner für $\frac{a}{b} \not\equiv a \equiv b \equiv 0 \pmod{1}$ die Transzendenz des Ausdruckes $\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(a, b)$ bewiesen werden. Für $0 < a, b$ führt (2) $B(a, b) = \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ ja auf die Perioden des unbestimmten Abelschen Integrales mit gleichem Integranden, wie (2). Die Transzendenz von (2) unter der Voraussetzung (1) wird vom Verf. nun in einen allgemeineren Rahmen eingebettet, indem er algebraisch zusammenhängende Abelsche Funktionen

untersucht. Gehen in die betrachteten $2p$ -fach periodischen Funktionen nur algebraische Koeffizienten ein, so zeigt Verf. zwischen $p+1$ solcher Funktionen eine algebraische Abhängigkeit auf. Weiter wird bewiesen: Die Perioden eines Abelschen Integrales erster oder zweiter Gattung, dessen Integrand als algebraische Funktion von x nur algebraische Zahlkoeffizienten besitzt, sind nicht alle algebraisch. Den Beweis dieser und noch etwas allgemeinerer Sätze hat Verf., was das arithmetisch-algebraische Verfahren anbelangt, in einer früheren Arbeit vorbereitet [Math. Ann. **113**, 1—13 (1936); dies. Zbl. **14**, 204]. Als funktionentheoretische Hilfsmittel im gegenwärtigen Fall aber treten Riemannsche θ -Funktionen von p komplexen Veränderlichen und p -fache Randintegrale im $2p$ -dimensionalen Raum auf. — Die schönen Ergebnisse des Verf. runden die bekannten Transzendenzuntersuchungen von Siegel und Gelfond in erfreulicher Weise ab. Benutzt wird hier, wie bei den klassischen Vorarbeiten von Hermite und Lindemann, das Vorhandensein differentieller Bindungen. *Maier* (Greifswald).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Birnbaum, Z. W., and Herbert S. Zuckerman: On the properties of a collective. Amer. J. Math. **62**, 787—791 (1940).

Einer unendlichen Folge K von Elementen $a_v = 0$ oder 1 sei der Dualbruch $\sum a_v 2^{-v}$ und einer Stellenauswahl S , welche aus K die unendliche Teilfolge K_s von Elementen mit den Stellenzeigern v_1, v_2, \dots aussieht, der Dualbruch $\sum b_v 2^{-v}$ mit $b_{v_k} = 1$, sonst 0 zugeordnet; $f_n(K)$ bzw. $f_n(K_s)$ bezeichne schließlich die relative Häufigkeit der Einser im n -gliedrigen Anfangsabschnitt von K bzw. K_s . In der beachtenswerten Note wird dann höchst übersichtlich gezeigt: Die Menge der Häufungswerte der Folgen $(f_n(K))$ und $(f_n(K_s))$ stimmt 1. bei festem K für fast alle S , 2. bei festem S für fast alle K , 3. bei allen Elementen einer $\{K\}$ -Menge vom Maß Eins höchstens für jedes Element einer $\{S\}$ -Menge vom Maß Null überein. „Fast alle“ bedeutet hierbei: alle, mit Ausnahme einer Menge vom Nullmaß, und „Maß“ bedeutet Lebesguesches Maß der entsprechenden, auf das Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ fallenden Dualbruchmenge. Im Falle 2. besteht schließlich die Menge der gemeinsamen Häufungswerte bloß aus $\frac{1}{2}$. — Der Spezialfall einer konvergenten $f_n(K)$ -Folge wirft somit helles Licht auf die Existenzmöglichkeit des v. Misesschen Kollektivbegriffs im Falle einer einfachen Alternative.

v. Stachó (Budapest).

Hartman, Philip, and Aurel Wintner: On the spherical approach to the normal distribution law. Amer. J. Math. **62**, 759—779 (1940).

Die Abhandlung stellt eine Weiterführung spezieller Studien aus der Theorie der n -dim., insbesondere kugelsymmetrischen (kurz ks.) Verteilungsfunktionen (kurz Vf.) dar, die zu einem bekannten Forschungsgebiet der Verff. und ihrer Mitarbeiter gehört. Die den Untersuchungen zugrunde liegende Problemlage ergibt sich durch Definition eines Projektionsoperators, der einer n -dim. ks. Vf. (durch Projektion auf einen k -dim. Unterraum) eine k ($< n$)-dim. ks. Vf. zuordnet. Verschiedene in der Literatur sich zerstreut vorfindende Arbeiten, die zu einem bestimmten Ideenkreis (ks. Approximationen der Normalverteilung, Kennzeichnung der Normalverteilung durch Funktionalrelationen [Maxwell-Boltzmannsches Geschwindigkeitsverteilungsgesetz] und a. m.) gehören, stehen mit derartigen Projektionsoperationen in engster Beziehung. Derartige Berührungspunkte werden von den Verff. durch aufschlußreiche Hinweise deutlich hervorgehoben. — $\Phi_n(E_n)$ sei eine ks. Vf. im Euklidischen R_n , d. h. eine nichtnegative, total additive und normierte, für alle Borelmengen E_n von R_n definierte Mengenfunktion, die bei Drehung von E_n um den Ursprung invariant bleibt. In einem k ($< n$)-dim. Unterraum R_k von R_n durch den Ursprung wird eine Vf. Φ_k dadurch definiert, daß für jede Borelmenge E_k in R_k $\Phi_k(E_k) = \Phi_n(P[E_k])$ gesetzt wird, wobei $P[E_k]$ diejenige Menge in R_n bezeichnet, deren Normalprojektion auf R_k die Menge E_k ist.

Die „Projektion“ Φ_k von Φ_n ist wieder ks. Es sei $\varrho_k(r) = \Phi_k(E_k^r)$, $r > 0$, wo E_k^r in R_k die k -dim. Kugel um den Ursprung vom Radius r bezeichnet. Im Falle $k = 1$ wird die gebräuchlichere Vf. $\sigma(x)$, $\sigma(-\infty) = 0$, $\sigma(\infty) = 1$ durch $\sigma(x) = \frac{1}{2}(1 + \varrho_1(x))$, $x \geq 0$; $\sigma(-x) = 1 - \sigma(x)$ eingeführt. Es gilt die Darstellung:

$$(1) \quad \varrho_k(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi_{nk} \left(\frac{r}{t} \right) d\varrho_n(t), \quad r > 0; \quad \varrho_k(0) = 0;$$

$$(2) \quad \psi_{nk}(r) = 2 B_n^k \int_{\arccos r}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k-1} \theta \sin^{n-k-1} \theta d\theta, \quad 0 \leq r \leq 1; \quad \psi_{nk}(r) = 1, \quad r > 1;$$

$$B_n^k = \frac{A_n A_{n-1} \cdots A_{k+1}}{A_{n-k} A_{n-k-1} \cdots A_2}, \quad A_j = \left[\int_0^{\pi} \sin^{j-2} \theta d\theta \right]^{-1}.$$

Die von Verff. gegebene Darstellung (2) enthält den Faktor 2 nicht; vermutlich wird es sich um ein Versehen handeln. Für B_n^k läßt sich übrigens vorteilhafter der explizite Wert $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right)$ anschreiben. — Alle σ , die für jedes n Projektionen einer n -dim. ks. Vf. sind, werden zu einer Klasse Ω zusammengefaßt, und es wird gezeigt, daß die Vf. σ dann und nur dann zu Ω gehört, falls eine Vf. τ existiert, $\tau(0) = 0$,

$$\tau(\infty) = 1, \text{ so daß } (3) \sigma(x) = \int_0^{\infty} \sigma^* \left(\frac{x}{t} \right) d\tau(t), \text{ wo } \sigma^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \text{ ist. Der Beweis}$$

stützt sich auf das für Vf. gültige Auswahltheorem von Helly für gleichmäßig beschränkte Funktionen gleichmäßig beschränkter Totalschwankung, sowie auf die bekannte Tatsache (Gauss, Bravais, Maxwell; ferner Schoenberg, dies. Zbl. 19, 415), daß σ^* zu Ω gehört. Es gilt die folgende Erweiterung des Darstellungstheorems (3): Wenn $\tau(t, y)$ für jedes $y \geq 0$ eine Vf. ist, mit $\tau(0, y) = 0$, $\tau(\infty, y) = 1$, und für jedes

$$\text{feste } t \geq 0 \text{ eine Bairesche Funktion in } 0 \leq y < \infty, \text{ und wenn } \omega(x, y) = \int_0^{\infty} \sigma^* \left(\frac{x}{t} \right) d_t(t, y)$$

$$\text{ist, so gilt die Darstellung (4) } \sigma(x) = \int_0^{\infty} \omega(x, t) d\xi(t) \text{ für ein } \sigma \text{ aus } \Omega \text{ dann und nur dann, wenn eine Vf. } \xi(t) \text{ mit } \xi(0) = 0, \xi(\infty) = 1 \text{ existiert, so daß } \tau(t) = \int_0^{\infty} \tau(t, y) d\xi(y)$$

ist. Beim Beweis wird die eindeutige Bestimmtheit der Vf. τ durch σ auf Grund von (3) benutzt. Im Sinne des eben besprochenen Darstellungstheorems werden die entsprechenden Bedingungen formuliert für die Darstellbarkeit [spezieller als (4)]:

$$(5) \quad \sigma(x) = \int_0^{\infty} \omega \left(\frac{x}{t} \right) d\xi(t).$$

Alle σ , die (5) gestatten, bilden eine Klasse Ω_{ω} . Aus einer Tauschformel (Stieltjes-Fubini) folgt die nützliche Regel: Aus σ in Ω_{ω} und μ in Ω_{σ} folgt μ in Ω_{ω} . Ein besonders schönes Resultat wird erzielt durch Anwendung auf die symmetrische stabile Vf. σ_{γ} , $0 < \gamma \leq 2$, deren Fourier-Stieltjessche Transformierte nach P. Lévy (vgl. A. Wintner, dies. Zbl. 13, 159) $e^{-|u|^{\gamma}}$ ist. Es gilt: σ_{α} gehört dann und nur dann zu $\Omega_{\sigma_{\beta}}$, wenn $\alpha \leq \beta$ ist. Beachte, daß wegen $\sigma_2 = \sigma^*$, $\Omega_{\sigma_2} = \Omega$ ist. — Es folgt weiter eine Kennzeichnung der Normalverteilung auf Grund der Funktionalbeziehung

$$\nu_n(cr) = C^k \nu_{n-k}(r), \quad r > 0, \quad 0 < k < n; \quad c, C \text{ positive Konst.,}$$

wo

$$(2r)^{\frac{k}{2}} \nu_k(r) : \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = 1 - \int_r^{\infty} x^{-k+1} d\varrho_k(x)$$

ist. Verf. betrachten ferner (nicht notwendig ks.) Vf. $\psi_n(E_n)$, für die es zwei normalstehende k - und $(n-k)$ -dim. Unterräume gibt, daß $\psi_n(E_k \times E_{n-k}) = \psi_k(E_k) \psi_{n-k}(E_{n-k})$; E_k in R_k , E_{n-k} in R_{n-k} gilt. $E_k \times E_{n-k}$ bezeichnet die Menge im R_n , deren Projektionen auf die Unterräume R_k und R_{n-k} die Mengen E_k und E_{n-k} sind. Kennzeichnung der Normalverteilung durch derartige Zerlegungseigenschaften (Zusammenhang mit den Arbeiten von M. P. Geppert, dies. Zbl. 15, 310; M. Kac, dies. Zbl. 22, 61). Den Abschluß der Abhandlung bildet eine Studie über die 1-dim. Vf. λ_n^p , $p > 0$, die man durch Projektion der n -dim., über den Bereich $\sum_1^n |x_j|^p \leq 1$ erstreckten Gleich-

verteilung auf eine Koordinatenachse gewinnt. Erwähnt sei noch die asymptotische Formel

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{n^p} \lambda_n^p \left(\frac{x}{\frac{1}{n^p}} \right) = e^{-\frac{|x|^p}{p}} : 2p^p \Gamma \left(1 + \frac{1}{p} \right); \quad -\infty < x < \infty.$$

Projektion der über die Fläche $\sum_1^n |x_j|^p = 1$ erstreckten Gleichverteilung auf eine Koordinatenachse führt analog zur Vf. $\bar{\lambda}_n^p$. — Die Fourier-Stieltjessche Transformierten der Vf. λ_n^2 und $\bar{\lambda}_n^2$ sind, wie bekannt, durch Besselsche Funktionen darstellbar. Es gilt die Beziehung $\bar{\lambda}_{n+2}^2 = \lambda_n^2$; ($n = 1, 2, \dots$). H. Hadwiger (Bern).

Kawata, Tatsuo: On the division of a probability law. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 249—254 (1940).

Sich auf seine Untersuchungen über nichtverschwindende Funktionen (dies. Zbl. 23, 237) berufend, gibt Verf. zunächst folgende zwei Sätze an: Die Teilung eines Verteilungsgesetzes mit der Verteilungsfunktion $\sigma(x)$ durch ein festes anderes, d. h. die Faktorenzersetzung ihrer charakteristischen Funktion $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d\sigma(x)$ nach einer festen anderen ist, wenn überhaupt, sicherlich eindeutig ausführbar, falls es eine in $(0, \infty)$ nichtabnehmende positive Funktion $\theta(u)$ mit divergentem $\int_1^\infty \frac{\theta(u)}{u^2} du$ gibt, so

daß für irgendeine positive Konstante a die Differenz $\sigma(-u+a) - \sigma(-u-a) = O(e^{-\theta(u)})$ wird, oder falls $\sigma(x)$ in $(-\infty, 0)$ eine Treppenfunktion ist, deren Sprungstellen a_n hier der Bedingung $|a_n - a_{n+1}| \rightarrow \infty$ genügen. — In der vorliegenden Arbeit selbst wird nur gezeigt, daß die beiden angeführten hinreichenden Bedingungen in jenem Sinne die besten sind, daß ihre Divergenzbedingungen [im zweiten Falle selbst bei in $(-\infty, \infty)$ vorausgesetztem Punktspektrum von $\sigma(x)$] nicht fallen gelassen werden können.

von Stachó (Budapest).

Hartman, Philip, and Aurel Wintner: On the law of the iterated logarithm. Amer. J. Math. 63, 169—176 (1941).

Soit $z_1(t), z_2(t), \dots$ une suite infinie de fonctions réelles et indépendantes dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$. Nous supposons que la valeur moyenne de $z_1(t) + \dots + z_n(t)$ soit égale à zéro pour chaque valeur de n :

$$\int_0^1 z_n(t) dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

et que, si $n \rightarrow \infty$,

$$B_n \rightarrow \infty, \quad \text{où} \quad B_n = b_1 + \dots + b_n; \quad b_n = \int_0^1 [z_n(t)]^2 dt.$$

A. Kolmogoroff [Math. Ann. 101, 126 (1929)] a démontré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1(t) + \dots + z_n(t)}{(2B_n \log \log B_n)^{\frac{1}{2}}} = 1,$$

pour presque toutes les valeurs de t , si $z_n(t)$ est une fonction bornée et si

$$|z_n(t)| \leq m_n = O \left(\frac{B_n}{\log \log B_n} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour} \quad n \rightarrow \infty.$$

Les auteurs remplacent les conditions de ce théorème par des conditions imposées aux moments du premier et du second ordre des fonctions de distribution relatives aux fonctions $z_1(t), z_2(t), \dots$.

B. Hostinský (Brünn).

Kolmogoroff, A.: Interpolation und Extrapolation von stationären zufälligen Folgen. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. 5, 3—11 u. deutsch. Zusammenfassung 11—14 (1941) [Russisch].

Soit $x(t)$ une quantité aléatoire, t étant un entier quelconque ($-\infty < t < \infty$); supposons que la valeur moyenne du carré de $x(t)$, $M[x(t)^2]$, soit une quantité finie, que $m = M(x(t)) = 0$ et que $B(k) = M[(x(t+k) - m)(x(t) - m)] = M[x(t+k)x(t)]$ ne dépend pas de t . La suite $x(t)$ est alors stationnaire. Le problème de l'extrapolation linéaire de cette suite consiste (sous la condition $M(x(t)) = 0$) à trouver les coefficients a_s tels que $L = a_1 x(t-1) + a_2 x(t-2) + \dots + a_n x(t-n)$ donne la meilleure approximation de $x(t+m)$, n et m étant donnés. Les a_s sont déterminés par la condition que $\sigma^2 = M[(x(t+m) - L)^2]$ prenne la plus petite valeur. Soit $\sigma_E^2(n, m)$ ce minimum de σ^2 ; la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_E^2(n, m) = \sigma_E^2(m)$ existe. — Le problème d'interpolation se pose d'une manière analogue. Soit $\sigma_I^2(n)$ la valeur minimum de $M[(x(t) - Q)^2]$ où

$$Q = a_1 x(t+1) + a_2 x(t+2) + \dots + a_n x(t+n) + a_{-1} x(t-1) + a_{-2} x(t-2) + \dots + a_{-n} x(t-n).$$

La limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_I^2(n) = \sigma_I^2$ existe. — Les moments $B(k)$ pour une suite stationnaire quelconque s'expriment au moyen de la formule

$$B(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos k\lambda \cdot dW(\lambda)$$

où la fonction non décroissante $W(\lambda)$ est donnée par

$$W(\lambda) = B(0) \cdot \lambda + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B(k)}{k} \sin k\lambda.$$

Posons $w(\lambda) = dW(\lambda)/d\lambda$; si l'intégrale $R = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\lambda}{w(\lambda)}$ est infinie, $\sigma_I^2 = 0$. Si elle a une valeur finie, nous avons

$$\sigma_I^2 = \frac{1}{R} = \pi \int_0^\pi \frac{d\lambda}{w(\lambda)}.$$

B. Hostinský.

Ginsbourg, G.: Sur les lois limites des distributions dans les procédés stochastiques. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 17, 65—73 u. franz. Zusammenfassung 73 (1940) [Russisch].

Ce travail est basé sur les recherches de S. Bernstein [Trav. Inst. phys.-math. Stekloff 5, 95—123 (1934); dies. Zbl. 9, 218] relatives aux équations différentielles stochastiques. Soit, suivant S. Bernstein,

$$\Delta y = A(y) \cdot \Delta t + f(\alpha, y) \sqrt{\Delta t}$$

une relation finie et continue qui détermine successivement $y_1 = y_0 + \Delta y_0, \dots$,

$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$ aux moments $t_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i$ au moyen de la quantité aléatoire α dont

la loi de probabilité est connue. Nous supposons que la valeur moyenne de $f(\alpha, y)$ est nulle quelle que soit la valeur de y , $Ef(\alpha, y) = 0$. t ayant une valeur fixe, la probabilité de l'inégalité $|y_n| < A$ (où A est une constante) tend sous certaines conditions vers une fonction limite $P(y, t)$ pour $n \rightarrow \infty$ ($\lim t_n = t, \lim y_n = y$). — Posons $B(y) = Ef^2(\alpha, y)$. L'auteur étudie la loi limite $p(y)$ de $P(y, t)$ pour $t \rightarrow \infty$. Voici le résultat principal: Si $B(y_0) = 0$ et $A(y_0) \geq 0$, on a $\frac{dp(y_0)}{dy_0} = 0$ et la fonction $\frac{dp(y_0)}{dy_0}$

est continue au point y_0 . L'auteur étudie quelques cas où il démontre l'unicité de la distribution limite. *B. Hostinský* (Brünn).

Kitagawa, Tosio: The limit theorems of the stochastic contagious processes. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ. A 1, 167—194 (1941).

Généralisations diverses des problèmes relatifs aux variables aléatoires enchainées qui ont été considérés par F. Eggenberger et G. Pólya [Z. angew. Math. Mech. 3, 279 (1923)]. *B. Hostinský* (Brünn).

Kitagawa, T., and S. Huruya: The application of the limit theorem of the contagious stochastic process to the contagious diseases. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ. A 1, 195—207 (1941).

Application de la théorie de Eggenberger-Pólya (voir le travail précédent) et de la loi des petits nombres (loi de Poisson) aux phénomènes (maladies contagieuses) dont la probabilité est très petite. *B. Hostinský* (Brünn).

Schelling, H. von: Fehlerrechnung bei biologischen Messungen. Naturwiss. 28, 765—766 (1940).

Es seien $h_1 = \frac{z_1}{n_1}$ und $h_2 = \frac{z_2}{n_2}$ zwei beobachtete Häufigkeiten, x_1 und x_2 die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Gesucht werden Mutungsgrenzen für die Differenz $x_1 - x_2$ und den Quotienten $x_1 : x_2$. Zu dem Zweck wird ein „Mutungs oval“ mit der Gleichung

$$\frac{n_1(x_1 - h_1)^2}{x_1(1 - x_1)} + \frac{n_2(x_2 - h_2)^2}{x_2(1 - x_2)} = k^2$$

gebildet. Den Werten $k = 1, 2, 3$ entsprechen, so wird behauptet, die Chancen 68%, 95% und 99,7%. Zwei Geraden $x_1 - x_2 = d'$ und $x_1 - x_2 = d''$ werden das Oval berühren. Dann sind d' und d'' die gewünschten Mutungsgrenzen für $x_1 - x_2$. Benutzt man logarithmische Skalen, so erhält man ebenso Mutungsgrenzen für $x_1 : x_2$. Eine ausführlichere Darstellung soll als Publikation des Staatsinst. f. exp. Therapie zu Frankfurt a. M. erscheinen. *van der Waerden* (Leipzig).

Pizzetti, Ernesto: Betrachtungen über die Messung der Variabilität vermittle der mittleren Differenz nach Gini. Arch. Rassenbiol. 34, 321—328 (1941).

Anlaß zu dieser Arbeit gab ein Streuungsmaß, das ein deutscher Erbbiologe 1939 einer 1928 veröffentlichten Arbeit eines anderen deutschen Erbbiologen entnimmt. Beiden Forschern ist es entgangen, daß die von ihnen verwendete Formel weiter nichts darstellt als die bereits 1912 von C. Gini [Variabilità e mutabilità, Studi economico-giuridici pubblicati per cura della Facoltà di giurisprudenza della R. Università di Cagliari 3 (2a) (1912); Neudruck in: C. Gini, Memorie di metodologia statistica; 1: Variabilità e concentrazione, Milano 1939] definierte mittlere Differenz, deren Theorie und Anwendung seither besonders von der italienischen Schule entwickelt und gepflegt wurde, aber auch im ausländischen Schrifttum Eingang fand und speziell von Czuber, Lexis und Weinberg der deutschen Statistik bekannt gemacht wurde. Verf. betont nicht den Prioritätsanspruch, sondern will dankenswerterweise den deutschen Biologen einige nützliche, die Berechnung der mittleren Differenz wesentlich vereinfachende Formeln von Gini, Czuber, De Gleria, Pietra, De Finetti und Paciello zur Kenntnis bringen und zum Gebrauch empfehlen. Durch Abzählung der notwendigen Rechenoperationen weist Verf. nach, daß diese Formeln, von denen diejenige De Finetti-Paciello die jüngste und vorteilhafteste ist, im Vergleich zu der kürzlich von deutschen Biologen verwendeten die Rechenarbeit stark reduzieren. Reichhaltige Literaturangaben. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Faesi, M.: Über die Glättung statistischer Verteilungsreihen. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 40, 61—84 (1940).

Es sei $\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots$ eine statistische Verteilungsreihe $\alpha = \{A_\lambda\}$ mit $A_\lambda \geq 0$, $\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda = 1$. Durch die Gleichung

$$\varphi_\omega[\alpha, x] = \omega A_\lambda, \quad \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\omega} \leq x < \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\omega}, \quad (\lambda = 0, 1, -1, 2, -2, \dots)$$

wird ihr die Verteilungsfunktion mit der Präzision $\omega, \varphi_\omega[\alpha, x]$, zugeordnet. Die Reihe $\{A_\lambda\}$ werde durch wiederholte Anwendung der Glättungsformel

$$A_\lambda^1 = \frac{A_{\lambda-k} + A_{\lambda-k+1} + \dots + A_{\lambda+k}}{2k+1}$$

geglättet. Ohne Benutzung der Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung beweist Verf. unter Heranziehung der Hilfsfunktion $F(z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} A_\lambda z^\lambda$, daß die der n -fach geglätteten Reihe zugeordnete Verteilungsfunktion mit der Präzision $\omega = \sqrt{n}$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die Normalverteilung $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 x^2}$ mit $h^2 = 6/[(2k+1)^2 - 1]$ konvergiert. Die Ausführungen finden Anwendung auf das asymptotische Verhalten der Polynomkoeffizienten. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Baker, G. A.: Maximum likelihood estimation of the ratio of the components of non-homogeneous populations. Tôhoku Math. J. 47, 304—308 (1940).

Eine Verteilung $f(x)$ setze sich in der Form

$$f(x) = \frac{1}{1+k} [f_1(x) + k f_2(x)]$$

linear aus zwei Komponenten $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zusammen. Der unbekannte Parameter k soll auf Grund der beobachteten Frequenz $f(x)$ geschätzt werden, was in der Regel durch Heranziehung der Momente erfolgt. Verf. prüft, ob die optimale Schätzung (maximum likelihood) in diesem Falle Vorteile bietet. Sein Ergebnis ist negativ. Im allgemeinen wird die Formel für k viel zu verwickelt, in einfachen Sonderfällen führt sie auf untragbare Intervalle. Bedenklich ist es allerdings, daß diese Intervalle für k auch in negatives Gebiet reichen, was sachlich sinnlos ist. Man wird nicht überzeugt, daß die Methode R. A. Fishers wirklich in der für das Problem angemessenen Form zur Anwendung gebracht worden ist. *v. Schelling* (Berlin).

Kimball, Bradford F.: Orthogonal polynomials applied to least square fitting of weighted observations. Ann. math. Statist. 11, 348—352 (1940).

Verf. zeigt, daß die quadratische Ausgleichung mittels orthogonaler Polynome auch im Falle ungleicher Gewichte gangbar ist, wenn man als die bei den orthogonalen Funktionen auftretenden willkürlichen Polynome r -ten Grades die Funktionen $\binom{x}{r}$ wählt. *Bodewig* (Den Haag).

Mitropolsky, A.: Berechnung einfacher Regressionsgleichungen. J. techn. Physics, Leningrad 10, 1227—1241 (1940) [Russisch].

Anweisung zur Berechnung der Koeffizienten einer parabolischen Regressionsgleichung beliebiger Ordnung für einfache Korrelation nach der Tschebyscheffschen Methode der orthogonalen Polynome (vgl. Verf., Bull. Acad. Sci. URSS, Moscou, Cl. Sci. math. natur. Sér. math. 1937, 125—134). Zahlenbeispiel. *Wassilij Höfdding*.

Mitropolsky, A.: On the multiple non-linear correlation equations. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 4, 399—405 u. engl. Zusammenfassung 405—406 (1939) [Russisch].

Biomathematik, Versicherungs- und Finanzmathematik:

Hadwiger, H.: Natürliche Ausscheidefunktionen für Gesamtheiten und die Lösung der Erneuerungsgleichung. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 40, 31—39 (1940).

Ist $\Phi(x)$ die Ausscheidefunktion und $p(t)$ die Verweilwahrscheinlichkeit einer Individuengruppe konstanten Umfangs, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Individuum mindestens t Zeiteinheiten der Gesamtheit angehöre, so gilt bekanntlich für die Erneuerungsintensität $\varphi(x)$ die Integralgleichung

$$\varphi(t) = \Phi(t) + \int_0^t \Phi(t-x) \varphi(x) dx.$$

Ist $\Phi(A, x)$ analytische Funktion eines Parameters A , so weist Verf. durch Koppelung zweier verschiedenen Parameterwerten A, B entsprechender Gesamtheiten nach, daß Φ der Funktionalgleichung

$$\Phi(C, t) = \int_0^t \Phi(A, \xi) \Phi(B, t - \xi) d\xi$$

genügen muß, wo die durch die Koppelung gewonnene neue Gesamtheit durch den Parameterwert C (Funktion von A und B) gekennzeichnet wird. Im Fall des speziellen Kompositionsgesetzes $C = A + B$ lautet eine solche, dieser Funktionalgleichung genügende „natürliche Ausscheidfunktion“ $\Phi(A, x) = A(\pi x^3)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(2aA - \frac{A^2}{x} - a^2x\right)$,

die entsprechende Erneuerungsfunktion $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(nA, x)$, die Verweilswahrscheinlichkeit $p(t) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{A}{\sqrt{t}}} \exp(2aA - z^2 - a^2A^2z^{-2}) dz$ und die „mittlere Verweilszeit“ $\bar{x} = \int_0^{\infty} x \cdot \Phi(x) dx = \frac{A}{a}$. (Vgl. auch dies. Zbl. 24, 57.) *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Hadwiger, Hugo: Über eine Funktionalgleichung der Bevölkerungstheorie und eine spezielle Klasse analytischer Lösungen. Bl. Versich.-Math. 5, 181—188 (1941).

Für die Funktionalgleichung der Bevölkerungstheorie

$$(1) \quad B(t) = \int_0^{\infty} B(t - \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

in der $B(t)$ die Geburtendichte der Mädchen zur Zeit t , $\varphi(\xi) = p(\xi)f(\xi)$, $p(\xi)$ die Erlebenswahrscheinlichkeit des Alters ξ , $f(\xi)$ die Fruchtbarkeitsziffer im Alter ξ bezeichnen, läßt sich unter der Annahme der Darstellung

$$\varphi(\xi) = e^{-\xi} \sum_{\nu=0}^k \frac{A_{\nu}}{\nu!} \xi^{\nu}$$

eine exakte Lösung angeben:

$$B(t) = \Re \sum_{\mu=1}^h C_{\mu} e^{r_{\mu} t},$$

worin C_{μ} willkürliche Konstanten, r_{μ} die als einfach vorausgesetzten Wurzeln der Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^k A_{\nu} (1+r)^{k-\nu} - (1+r)^{k+1} = 0,$$

für die $\Re r > -1$ ist, bedeuten.

Harald Geppert (Berlin).

Lotka, Alfred J.: Sur une équation intégrale de l'analyse démographique et industrielle. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 40, 1—16 (1940).

Gegen die von Lotka stammende Lösung $G(t) = \sum A_n e^{z_n t}$ der Fundamentalgleichung der Bevölkerungstheorie

$$G(t) = \int_0^a G(t - \xi) K(\xi) d\xi,$$

wobei z_n die Wurzeln von $\int_0^a e^{-z\xi} K(\xi) d\xi = 1$ sind, hat Hadwiger [Mitt. Vereinig.

schweiz. Versich.-Math. 38, 1—14 (1939); dies. Zbl. 22, 50] eingewendet, daß sie unter Umständen unüberwindliche rechnerische Schwierigkeiten bieten könne. Verf. behauptet, daß dieser Einwand für die in praxi auftretenden Fälle nicht zutreffe, und setzt am Beispiel einer Gesamtheit konstanten Umfanges, bei der jedes Element bei seinem Ausscheiden sofort durch ein neues ersetzt wird, eine bequeme Näherungsmethode zur Lösung der die z_n bestimmenden Gleichung auseinander. Unter der Annahme, daß der Kern $K(\xi)$ mit ausreichender Genauigkeit durch seine ersten vier Momente, etwa seine ersten vier Thieleschen Halbinvarianten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, bestimmt

werde, lautet die Definitionsgleichung der z_n näherungsweise

$$\log_e \int_0^a K(\xi) d\xi - \lambda_1 z + \frac{\lambda_2}{2!} z^2 - \frac{\lambda_3}{3!} z^3 + \frac{\lambda_4}{4!} z^4 = 2\pi n i \quad (n = \pm 1, 2, 3, \dots);$$

Trennung von $z = u + iv$ in Real- und Imaginärteil führt zu zwei Gleichungen für u, v als Funktionen von n . Ferner werden für das gewählte Beispiel Anordnung und asymptotisches Verhalten der Wurzeln z_n sowie das asymptotische Verhalten der Koeffizienten A_n für großes n diskutiert.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Preinreich, Gabriel A. D.: The theory of industrial replacement. Skand. Aktuarie Tidskr. 22, 1—9 (1939).

Verf. führt aus, daß die Lotkasche Erneuerungsgleichung nur anwendbar ist, wenn der Umfang der Häufigkeiten unbegrenzt ist.

F. Burkhardt (Leipzig).

Lotka, Alfred J.: The theory of industrial replacement. Skand. Aktuarie Tidskr. 23, 1—14 (1940).

Mit Bezug auf die Ausführungen von Preinreich (vgl. vorsteh. Ref.) legt Verf. dar, daß seine Gleichung auf Häufigkeitsverteilungen von begrenztem Umfange anwendbar ist und daß in der Praxis alle Verteilungen von begrenztem Umfange sind.

F. Burkhardt (Leipzig).

Richter, Hans: Eine Bemerkung zum Erneuerungsproblem. Arch. math. Wirtsch.-u. Sozialforschg 6, 135—136 (1940).

Für die Beschränktheit der Erneuerungsfunktion $\varphi(x)$ ist die Beschränktheit der Ableitung $p'(t)$ der Absterbeordnung notwendig. Dieser Satz wird ergänzt durch den Beweis der Behauptung: Damit die Erneuerungsfunktion beschränkt und konvergent ist, muß notwendig $\lim_{t \rightarrow \infty} p'(t) = 0$ sein.

Janko (Prag).

Doering, Carl R., and Alice L. Forbes: Adjusted death rates. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 25, 461—467 (1939).

In der vorliegenden Arbeit werden die verschiedenen Methoden zur schärferen Berechnung der Sterbeziffern an Hand des statistischen Materials für den Staat New York nach der Volkszählung 1930 und der Sterblichkeitsstatistik 1929—1931 mit Unterscheidung der 57 Bezirke bzw. 53 (nach Ausscheidung der Bezirke mit hoher Tuberkulosesterblichkeit) diskutiert. Der Verf. stellt gegenüber: rohe Sterbeziffer, Tafelsterbeziffer, die als Sanitätsindex vorgeschlagen wird, und standardisierte Sterbeziffern, die berechnet werden nach den Methoden der Standardbevölkerung, der Standardsterblichkeit, der konstanten Korrektionsfaktoren, der äquivalenten durchschnittlichen Sterbeziffern. Bei den standardisierten Sterbeziffern wird als Standard die Bevölkerung bzw. die Sterblichkeit des Staates New York benutzt. Mit Hilfe der Korrelationsrechnung findet Verf., daß in kleinen Ländern die Bevölkerung relativ alt ist, und weiter, daß von allen Methoden die Methode der konstanten Korrektionsfaktoren am wenigstens vom Zufall abhängig ist.

F. Burkhardt (Leipzig).

Jéquier, Ch.: L'assurance d'annuités et les combinaisons usuelles. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 40, 17—30 (1940).

On a montré dans ce travail, que toute assurance à terme fixe et toute assurance mixte peuvent se décomposer en une assurance épargne comme la combinaison fondamentale et une assurance d'annuités comme la combinaison complémentaire. Les variations des réserves sont expliquées par les particularités des assurances d'annuités. Par cette analyse on donne une réponse simple et précise à la question pourquoi des trois combinaisons courantes — épargne, à terme fixe, et mixte — c'est la combinaison qui admet la prime la plus faible qui présente généralement la réserve mathématique la plus forte et inversement.

Janko (Prag).

Parthier, Hans: Die Rechnungsfaktoren der Lebensversicherungsprämie in ihrer Wirkung auf die Prämienbestandteile. Bl. Versich.-Math. 5, 145—170 (1941).

Das Ziel dieser Arbeit ist, über die Größenverhältnisse der einzelnen Bestandteile der Tarifprämie der Lebensversicherung klare Anschauungen zu vermitteln und ihre Abhängigkeit von Rechnungsfaktoren theoretisch und zahlenmäßig vorzuführen. Die Tarifprämie wird als eine algebraische Summe von Prämienbestandteilen aufgefaßt. Die Grundlage, auf die die Rechnungsfaktoren erhöhend oder ermäßigend einwirken, ist die Jahresleistung des Versicherten, die erforderlich und genügend sein würde, wenn weder Sterblichkeit noch Zins noch

Unkosten in Rechnung zu ziehen wären. Der hierfür benötigte Prämienteil wird Urprämie genannt. — Läßt man die den Abschlußkosten und den laufenden Verwaltungskosten entsprechenden Prämienteile zunächst außer acht, so bleibt die Nettoprämie, die sich aus der Urprämie durch das gleichzeitige Wirken von Zins und Sterblichkeit ergibt. Der erste Weg wäre die Teilung der Nettoprämie in die zinsabhängige Sterblichkeitsprämie und die sterblichkeitsabhängige Zinsvergütung. Verlangt man, daß die Einflüsse beider Kräfte je unabhängig voneinander ausgedrückt werden, so erhält man die einfach zu definierenden Prämienteile, unabhängige Zinsvergütung und unabhängige Sterblichkeitsprämie. Das in der Wirklichkeit stattfindende gleichzeitige Angreifen an der Urprämie bringt noch einen besonderen Prämienteil, die Prämienberichtigung, die sich in mäßigen Grenzen hält. Der dritte Weg wird durch die Frage gegeben, welcher Teil der Nettoprämie aus dem Einfluß der Sterblichkeit entsteht, nachdem zuvor der Rechnungszins gewirkt hat. Dieser Weg läßt die Bildung der Nettoprämie aus Urprämie abzüglich unabhängiger Zinsvergütung und zuzüglich sekundärer Sterblichkeitsprämie erscheinen. Faßt man dagegen die Einwirkung der Sterblichkeit als den ersten, die Einwirkung des Zinses als den zweiten Schritt auf, so erhält man eine sekundäre Zinsvergütung. Das ist der vierte Weg, wo die Nettoprämie aus Urprämie zuzüglich unabhängiger Sterblichkeitsprämie und abzüglich sekundärer Zinsvergütung gebildet wird. Das Stadium der Abhängigkeit der einzelnen Prämienbestandteile vom wirkenden Rechnungsfaktor und den Größenverhältnissen wird auf die Wege zwei und drei beschränkt. Bei allen Ausführungen wird die gemischte Kapitalversicherung vorausgesetzt und die Berechnungen meistens teils für das Eintrittsalter 30 Jahre und verschiedene Versicherungsdauer teils für die Versicherungsdauer 25 Jahre und verschiedene Eintrittsalter durchgeführt. So wird auch in gewissem Umfange die Wirkung der Rechnungsfaktoren auf die einzelnen Prämienbestandteile größenmäßig gezeigt.

Janko (Prag).

Parthier, Hans: Über Änderungen an den Grundgrößen einer Zerfallordnung der Aktiven. Bl. Versich.-Math. 5, 121—140 (1940).

Der Verf. untersucht den Zusammenhang der vier Grundgrößen der Invaliditäts- und Pensionsversicherung q , q^a , i und q_c . Bei gegebenem Beginnalter ist die Zerfallordnung der Aktiven durch drei Grundgrößen bestimmt; die vierte ist von ihnen abhängig, da zwischen den vier Grundgrößen eine Zusammenhangsgleichung besteht. An Hand derselben untersucht der Verf. die Änderung der vierten abhängigen Grundgröße bei Änderung der drei primär gegebenen Grundgrößen. In systematischem Vorgehen betrachtet er einfache, doppelte und dreifache Änderungen der primär gegebenen Grundgrößen. Die Änderungsergebnisse werden tabellarisch zusammengestellt. Der Verf. erörtert auch den Grad der Empfindlichkeit, mit dem die abhängige Grundgröße auf die Änderung der anderen Grundgrößen reagiert, und zeigt die Auswirkungen auf, die die willkürliche Ersetzung einer Grundreihe durch eine andere nach sich zieht.

F. Burkhardt (Leipzig).

Jecklin, H., und W. Maurer: Vollautomatische Reserveberechnung. Mitt. Ver. einig. schweiz. Versich.-Math. 40, 45—60 (1940).

Zuerst werden Reserveformeln für die gruppenweise Reserveberechnung in der Lebensversicherung auf Grund der Hilfszahlenmethode aufgestellt. Die Reserveformel, welche möglichst viele Varianten der Versicherungsarten umfassen soll, wird in möglichst wenige Komponenten zerlegt, welche entweder während der ganzen Versicherungsdauer konstant sind oder aus dem Produkt zweier Faktoren bestehen, wovon der eine während der ganzen Versicherungsdauer konstant und der andere eine Funktion des erreichten Alters des Versicherten ist. — Darauf wird das ganze Verfahren besprochen, wie die gesamte Reserveberechnung mechanisch mit Hilfe von Lochkartenmaschinen durchgeführt werden kann. Manuelle Arbeiten oder zusätzliche Rechnungen auf anderen Rechenmaschinen werden vollkommen eliminiert. Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens hat sich nach der Meinung der Verff. an einem Rückversicherungsportefeuille mit außergewöhnlich großer Differenzierung und Unterteilung praktisch voll bewährt.

Janko (Prag).

Riebesell, Paul: Ist die Umlage-Versicherung doch eine richtige Versicherung? Bl. Versich.-Math. 5, 170—181 (1941).

In diesem Vortrag werden in sehr anschaulicher Weise die verschiedenen Umlage-Finanzierungssysteme, die hauptsächlich bei Sozialversicherungen zur Anwendung gelangen, diskutiert.

Saxer (Zürich).

Geometrie.

Elementare und darstellende Geometrie:

Staeble, F.: Glasabfall beim rechteckigen Zusehnitt von Linsen (Kalottensegment). Z. Instrumentenkde. 61, 26—29 (1941).

Ein Kugelabschnitt wird durch eine Ebene senkrecht zu seiner Begrenzungsebene zer-

scanitten. Der Inhalt eines solchen Teilkörpers wird dadurch berechnet, daß er durch Ebenen parallel zu einer Begrenzungssebene in Schichten zerschnitten wird. *Konrad Ludwig.*

Brooks, R. L., C. A. B. Smith, A. H. Stone and W. T. Tutte: The dissection of rectangles into squares. *Duke math. J.* **7**, 312—340 (1940).

Jedem in Quadrate zerlegten Rechteck wird ein Netzwerk stromdurchflossener Leiter zugeordnet, wobei die Stromstärken gleich den Seitenlängen der Teilquadrate sind. Die Kirchhoffschen Gesetze erweisen sich als erfüllt, daher wird die Theorie der Stromverteilung in Leiternetzen anwendbar. Auf diesem Wege werden außer bekannten auch zahlreiche neue Resultate gewonnen, von denen erwähnt seien: Zerlegung des Quadrats in nur 26 inkongruente Quadrate; Aufzählung sämtlicher Rechtecke, die in höchstens 11 inkongruente Quadrate zerlegbar sind; Angabe von Rechteckspaaren, die sich nur (aber in nicht-trivialer Weise) durch die Anordnung der inkongruenten Teilquadrate unterscheiden; Verallgemeinerungen auf andere Zerlegungen. *Sprague.*

Escher, B. G.: Über die reguläre und hexagonale dichteste Kugelpackung und die Deformation dieser Kugeln zu Dodekaedern durch Druck. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **43**, 1302—1310 (1940) [Holländisch].

Eine „dichteste Kugelpackung“ des Raumes hängt in bekannter Weise mit dem Tetraeder-Oктаeder-Gefüge zusammen. Hieraus gehen andere Packungen derselben „Dichte“ hervor, indem man etwa die waagerechten Kugelschichten, in denen die Kugelmittelpunkte die Ecken eines regulären Dreiecksnetzes bilden, zueinander verschiebt. Es gibt dann zwei Fälle, die Nachbarschichten einer Schicht können zu ihr symmetrisch liegen (hexagonaler Fall) oder nicht (regulärer Fall). Letzteres trifft für die zuerst erwähnte Packung zu. In jedem Fall wird jede Kugel von 12 anderen berührt; ihre Mittelpunkte bilden halbreguläre Dodekaeder, die Verf. darstellt, und die auch entstehen müssen, wenn eine Packung aus deformierbaren Kugeln allseitigem Druck unterworfen wird. Ausgangspunkt ist das Vorkommen solcher Gebilde in der Natur. *Bol (Freiburg i. Br.).*

Iglisch, Rudolf: Über die Hauptaufgabe des Rückwärtseinschneidens gegebener Figuren. *Z. Vermessungswes.* **70**, 135—137 (1941).

Ein nach Seiten und Winkeln fest ausgemessenes Dreieck soll in eine gegebene geographische Karte eingetragen werden, in der drei andere Punkte bereits fixiert und durch Winkelmessungen mit den Dreieckspunkten verbunden sind. Diese Aufgabe wird in sehr einfacher Weise dadurch gelöst, daß man umgekehrt von der Dreiecksfigur ausgeht und in sie auf schnellstem Wege die drei Kartenpunkte einträgt. *U. Graf (Danzig).*

Marcantoni, Alessandro: Sul „Cilindro critico“ nel problema del „Vertice di Piramide“. *Atti Ist. Veneto Sci. etc.* **98**, 473—482 (1939).

Der bekannte „gefährliche Zylinder“ bei dem photogrammetrischen Problem der Pyramidenspitze wird analytisch als Fläche geringster Sicherheit der Lösung neuerdings gefunden. Eine geometrische Deutung der hierbei auftretenden Formeln vermittelt einen klaren Einblick in das Wesen der Unsicherheit von Lösungen in der Nähe dieses gefährlichen Ortes und läßt auch erkennen, wie seinen Punkten mehrfache Lösungen der Aufgabe entsprechen. *Wilhelm Schmid (Dresden).*

Projektive und algebraische Geometrie:

Pech, Johannes: Zum Aufbau quadratischer Kegelschnitts-Systeme 2. Stufe, die nur entartete Kegelschnitte enthalten. *Dresden: Diss.* 1939. 99 S.

Die doppelt-quadratische Form

$$a_{ik}x_ix_k = c_{iklm}x_ix_ky_ly_m = b_{lm}y_ly_m$$

eines ternären Gebietes soll die Bedingungen erfüllen $\|a_{ik}\| \equiv \|b_{kl}\| \equiv 0$. Diese Aufgabe wird auf elementarem Wege, gewissermaßen durch Ausprobieren, gelöst. Der Systematiker würde auf einer M_4 , die in einem R_8 verläuft, gewisse Mannigfaltigkeiten M_4

zu bestimmen haben; ob die Aufgabe dabei an Sprödigkeit verliert, wissen wir nicht zu sagen. Beck (Bonn).

Lorent, H.: Sur la quartique de Gutschoven. *Mathesis* 54, 118—119 (1940).

Es seien O ein fester Punkt einer festen Geraden d , M ein nicht auf d liegender Punkt und MN das Stück des in M auf OM errichteten Lotes zwischen M und der Geraden d . Der Ort des Punktes M , wenn MN eine gegebene konstante Länge a besitzt, ist die Quartik von Gutschoven (einem holländischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts). Verf. gibt ohne Beweis vier andere Erzeugungsweisen dieser Quartik an. Als Beispiel sei die erste angeführt: Ein Punkt P beschreibt einen Kreis um O ; eine Gerade gegebener Richtung durch P in der Ebene des Kreises trifft in Q das in O auf OP errichtete Lot. Dann beschreibt Q die Quartik von Gutschoven. Zacharias.

Veen, S. C. van: Hyperboloidische Quadrupel bei Tetraedern. *Mathematica, Zutphen B* 9, 90—94 (1940) [Holländisch].

Die an der Spitze stehende Definition eines hyperboloidischen Geradenquadrupels ist verunglückt. Danach wären bereits vier Gerade eines Büschels hyperboloidisch. — Bilden die Lote von den Ecken des Tetraeders $ABCD$ auf die Seiten des Tetraeders $A'B'C'D'$ ein hyperbolisches Quadrupel, so gilt das noch nach Vertauschung beider Tetraeder. Beck (Bonn).

Bone, H. B.: Hyperboloidisch liegende Geraden durch die Ecken oder auf den Ebenen eines Tetraeders. *Mathematica, Zutphen B* 9, 106—113 (1941) [Holländisch].

Zwei Beweise des im euklidischen und nichteuklidischen Raume gültigen Satzes: Befinden sich die von den Eckpunkten eines ersten Tetraeders auf die Ebenen eines zweiten gefällten Lote in hyperboloidischer Lage, so befinden sich auch die von den Eckpunkten des zweiten Tetraeders auf die Ebenen des ersten gefällten Lote in hyperboloidischer Lage. [Der Satz stammt von E. Berzolari. Wegen des Schrifttums vgl. E. A. Weiss, dies. Zbl. 3, 67 (1932), und Punktreihen geometrie, Leipzig 1939, S. 148, 150; dies. Zbl. 21, 348.] E. A. Weiss (Bonn).

Bottema, O.: On associated lines in S_4 . *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 43, 1282—1287 (1940).

Im Anschluß an eine Arbeit von W. van der Woude (vgl. dies. Zbl. 24, 70] wird die Figur der ∞^1 fünften assoziierten Geraden behandelt, die zu vier Geraden des R_4 gehören, welche eine gemeinsame Treffgerade besitzen. Es wird eine Konstruktion der ∞^1 Geraden angegeben. Es wird gezeigt, daß der Ort dieser Geraden die Projektion der Veroneseschen Fläche von einem ihrer Punkte aus ist, und es wird der Ort der ∞^2 gemeinsamen Treffebenen der Geraden behandelt. Gruppe der Kollineationen, welche die Figur invariant lassen. E. A. Weiss.

Berzolari, Luigi: Sulla curva sghemba del quinto ordine dotata di tre tangenti doppie. *Ist. Lombardo, Rend.*, III. s. 73, 545—568 (1940).

C^5 sei eine irreduzible Raumkurve 5. Ordnung mit 3 Doppeltangenten (Berührungspunkte $A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3$); sie ist rational und liegt auf einer von ihren ∞^1 vierpunktigen Schnittgeraden gebildeten Quadrik Q ; die genannten Sehnen bestimmen auf C^5 eine syzygetische Involution J_4 ; durch geeignete Wahl des Bezugssystems erhält C^5 die Gleichungen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (1 + \lambda^4) : -2\lambda^3 : 2\lambda^2 : -\lambda(1 + \lambda^4).$$

Bildet man zu jeder Geraden $a_i = A_i A'_i$ bezüglich der beiden andern innerhalb der umfassenden Erzeugendenschar von Q die harmonisch-konjugierte a'_i , so sind die a'_i Doppeltangenten einer auf Q liegenden andern Kurve I^5 mit den Gleichungen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 6\lambda^2 : \lambda(1 + \lambda^4) : -(1 + \lambda^4) : -6\lambda^3.$$

Die zweite Erzeugendenschar verbindet die (durch gleiche λ bezogenen) homologen Punktepaaire von C^5 und I^5 ; I^5 und C^5 schneiden sich in 8 Punkten, nämlich den beiden äquianharmonischen Gruppen ihrer syzygetischen Involutionen. Man kann

diesen beiden Kurven durch eine geometrische Konstruktion zwei Kubiken D^3 , Δ^3 mit den Gleichungen

$$x_1:x_2:x_3:x_4 = \lambda^3:\lambda^2:\lambda:1 \quad \text{bzw.} \quad = 3\lambda:-1:-\lambda^3:3\lambda^2$$

zuordnen, die simultane Invarianten einer oktaedrischen Kollineationsgruppe G_{24} sind; das Gleiche gilt mithin von C^5 und Γ^5 , und zwar zeigt sich genauer, daß unter den rationalen Raumkurven 5. Ordnung diejenigen mit 3 Doppeltangenten die einzigen sind, die bezüglich einer G_{24} invariant sind. — Dieser geometrischen Kennzeichnung tritt eine algebraische an die Seite; die Kurve: $\varrho x_i = f_i(\lambda, \mu)$, ($i = 1 \dots 4$), wo f_i binäre Formen 5. Grades sind, besitzt genau dann drei Doppeltangenten, wenn eine vom Verf. schon früher [Mem. R. Acc. dei Lincei (4) 7, 305—341 (1893)] angegebene elementare Kombinate 4. Ordnung der f_i identisch verschwindet. — Weiter entwickelt Verf. eine Reihe von Sätzen über die gegenseitige Lage der vier betrachteten Kurven. Z. B. schneiden die durch D^3 gehenden Quadriken auf C^5 ∞^2 -Gruppen von je 4 variablen Punkten aus; darunter befinden sich ∞^1 äquianharmonische Gruppen; sie fallen zugleich in die Schmiegungebenen von Δ^3 ; der Kegel, der D^3 von dem zu λ gehörigen Punkte der D^3 aus projiziert, trifft C^5 außerhalb der A_i , A'_i in einer solchen äquianharmonischen Gruppe, die in der zum Punkte λ der Δ^3 gehörigen Schmiegungeebene liegt; letztere trifft außerdem C^5 in dem zum Parameterwert λ gehörigen Punkt P ; durch P gehen zwei weitere Schmiegungebenen von Δ^3 , deren Berührungspunkte auf Δ^3 zu den gleichen Parameterwerten gehören, wie die beiden Berührungspunkte auf C^5 der durch P gehenden Doppelberührungsebene. *Harald Geppert* (Berlin).

Gigli, Clotilde: La „piccola variazione“ di una coppia di piani nella generazione di curve algebriche reali sopra una quadrica a punti reali. *Ist. Lombardo, Rend.*, III. s. 73, 327—348 (1940).

Verf. beschreibt eine neue Methode zur Herstellung reeller algebraischer Kurven, die auf einer Quadrik mit reellen Punkten liegen. Dabei wird von einem reellen Ebenenpaar ausgegangen, und aus diesem durch eine „kleine Variation“ in einem reellen Büschel eine nicht zerfallende Fläche zweiter Ordnung gewonnen; eine Kurve auf der letzten entsteht dann durch „kleine Variation“ aus einer zusammenhängenden Kurve, die in zwei in den beiden Ebenen liegende Komponenten zerfällt. Verf. wendet seine Methode vor allem für die Konstruktion reeller Kurven auf der Fläche zweiter Ordnung an, die die Höchstzahl mit der Ordnung verträglicher geschlossener Züge besitzen. Diese Ergebnisse wurden vom Verf. schon in einer früheren Arbeit angezeigt (dies. Zbl. 20, 390).

Mario Villa (Bologna).

Brusotti, Luigi: La „piccola variazione“ di una coppia di piani nella generazione di curve algebriche reali sopra una quadrica a punti reali. *Ist. Lombardo, Rend.*, III. s. 73, 349—354 (1940).

C. Gigli hat (siehe vorsteh. Ref.) ein Verfahren zur Konstruktion reeller Kurven auf einer reellpunktigen Fläche zweiter Ordnung, die die mit der Ordnung verträgliche Höchstzahl geschlossener Züge aufweisen, unter einer einschränkenden Bedingung entwickelt; Verf. zeigt, daß diese Konstruktion unabhängig von der genannten Einschränkung durchgeführt werden kann.

Mario Villa (Bologna).

Deaux, R.: Projectivités ternaires permutables. *Mathesis* 54, 97—109 (1940).

Zahlreiche Sätze über vertauschbare Projektivitäten der reellen Ebene, insbesondere über die Kollineationen und Korrelationen, die mit einer Polarität vertauschbar sind; über die Korrelationen, die als Produkt einer Polarität mit einer harmonischen Zentralkollineation darstellbar sind; über die Gruppe aller Projektivitäten, die mit einer Korrelation vertauschbar sind.

U. Morin (Padova).

Huff, Gerald B.: A geometry associated with Cremona's equations. *Amer. J. Math.* 62, 855—867 (1940).

Ein vollständiges, reguläres, lineares ebenes Kurvensystem Σ vom Geschlecht p und der Dimension d habe die Ordnung x_0 und in ϱ vorgeschriebenen Basispunkten die Vielfachheiten $x_1 \dots x_\varrho$; dann heißt $x \equiv \{x_0; x_1 \dots x_\varrho\}$ seine Charakteristik. Bei der

Bestimmung von Cremonatransformationen ist die Bestimmung solcher Charakteristiken zu leisten, die die diophantischen Gleichungen

$$(1) \quad (xx) \equiv \sum_{v=1}^{\varrho} x_v^2 - x_0^2 = 1 - d - p; \quad (lx) \equiv \sum_{v=1}^{\varrho} x_v - 3x_0 = -1 - d + p$$

erfüllen; eine bei gegebenen p, d, ϱ ganzzahlige Lösung von (1) heißt eigentlich, ausartend oder virtuell, je nachdem das entsprechende Σ irreduzibel, reduzibel oder nicht vorhanden ist. Ein Kriterium zur arithmetischen Feststellung der eigentlichen Lösungen fehlt noch. Um so wichtiger ist die Gewinnung neuer Charakteristiken x' durch eine Cremonatransformation (C.T.) mit den Fundamentalpunkten in den Basispunkten von Σ ; sie äußert sich in einer linearen Transformation L :

$$(2) \quad x'_0 = nx_0 - \sum_{v=1}^{\varrho} r_v x_v; \quad x'_i = s_i x_0 - \sum_{j=1}^{\varrho} \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1 \dots \varrho)$$

mit ganzen positiven Vorzahlen, bei der (xx) und (lx) absolut invariant bleiben. Aber nicht jeder solchen L entspricht eine C.T.; dies ist vielmehr, wie sich aus der Arbeit ergibt, nur für $\varrho \leq 10$ richtig, für $\varrho \geq 11$ hingegen falsch. Die Arbeit befaßt sich mit den Gruppen von L , die rationale oder ganze Vorzahlen haben oder C.T. entsprechen und (xx) und (lx) invariant lassen, sie werden mit $G(R), G(J), G(C)$ bezeichnet; Hilfsmittel ist die projektive Geometrie des S_{ϱ} mit den projektiven Koordinaten $x_0 \dots x_{\varrho}$. Zwei Charakteristiken x, y heißen gleichartig, wenn $(xx) = (yy), (lx) = (ly)$ ist; ein Punkt der verbindenden Geraden $z = \lambda x + \mu y$ ist dann mit ihnen gleichartig, wenn $(xy) = (xx), \lambda + \mu = 1$ ist, so daß man Büschel gleichartiger Charakteristiken finden kann; allgemeiner sind die Charakteristiken

$$x' = -\frac{1}{2}k^2(bb)(ax)a + k[(ax)b - (bx)a] + x \equiv S_{a,b}^k x,$$

falls $(aa) = (la) = (lb) = (ab) = 0$ ist, bei beliebigem k mit x gleichartig. Dies gibt die Möglichkeit gruppenweiser Zusammenfassung gleichartiger Charakteristiken, die für $\varrho = 9, 10, 11$ weiter verfolgt und zur Konstruktion von $G(J), G(C)$ ausgebaut wird.

Harald Geppert (Berlin).

Coble, A. B.: Trilinear forms. Duke math. J. 7, 380—395 (1940).

Untersucht werden trilineare Formen $T = (\alpha x)(\beta y)(\gamma z)$, deren veränderliche Punkte drei verschiedenen Räumen $[m], [n], [p]$ angehören. Das Punktepaa x, y wird neutral genannt, wenn $(\alpha x)(\beta y)\gamma_k = 0$ für $k = 0, 1, \dots, p$ gilt. Nach der Untersuchung der neutralen Punktepaare im allgemeinen Falle wird besonders der Fall $p + 1 = m + n$ behandelt, weil es in diesem Falle nur endlich viele neutrale Punktepaare x, y gibt. Die x bilden in $[m]$ ein Punktsystem P_N^m , die y in $[n]$ ein Punktsystem Q_N^n mit $N = \binom{m+n}{n}$. Die Anzahlen der Konstanten, von denen das Punktsystem P und die Form T abhängen, werden für $m=2$ einander gleich, nämlich gleich $n^2 + 3n - 6$. Dieser Fall einer Form $T(2, n, n+1)$ mit $n \geq 2$ bildet den Hauptgegenstand der Arbeit. Dabei wird $N = N_n = \binom{n+2}{2}$ gesetzt. Das Punktsystem $Q_{N_n}^n$ kann dann nicht mehr Konstanten binden als die Form T und muß daher mindestens $(n-2)\{N_{n-1} - 3\}$ projektiven Bedingungen unterworfen sein. Für diese Bedingungen werden algebraische und geometrische Deutungen angegeben. Dabei zeigt sich, daß die allgemeine Form $T(2, n, n+1)$ durch das beliebig vorgegebene Punktsystem $P_{N_n}^2$ der neutralen Punktepaare x, y bis auf projektive Transformationen eindeutig bestimmt ist. Die gesuchten Bedingungen sind äquivalent mit der Forderung, daß $Q_{N_n}^n$ in einem Raume $[N_{n-1} - 1]$ ein assoziiertes Punktsystem R_{N_n} [A. B. Coble, Associated sets of points, Trans. Amer. Math. Soc. 24, 1—20 (1922)] besitzt, das einer Veroneseschen Mannigfaltigkeit $V_2^{(n-1)^2}$ des $[N_{n-1} - 1]$ angehört (T. G. Room, The Geometry of Determinantal Loci, Cambridge 1938, S. 15; dies. Zbl. 20, 54). Das Punktsystem $Q_{N_n}^n$ ergibt sich aus $P_{N_n}^2$ bei der Abbildung von $[x]$ in den Raum $[n]$ vermöge der Kurven n -ter Ordnung durch

die Residualbasis $R_{N_n-1}^2$ eines Kurvenbüschels $Q^{n+1}(\zeta)$ durch $P_{N_n}^2$. Dabei wird die Ebene $[x]$ in eine Fläche $F_2^{N_n-2}$ von White abgebildet und das Büschel der Kurven $Q^{n+1}(\zeta)$ auf ein Büschel von Kurven $S^{N_n-1}(\zeta)$ auf $F_2^{N_n-2}$ mit $Q_{N_n}^n$ als Basis. Eine Eigenschaft der Kurven S ergibt sich folgendermaßen: Hält man in den Gleichungen $(\alpha x)(\gamma z)\beta_j = 0$ den Punkt x fest, so erhält man $n+1$ lineare Gleichungen in z . Sie definieren einen Punkt z . So entsteht eine Abbildung der Ebene $[x]$ auf die Punkte einer Fläche $F_2^{N_n-1}$ in $[z]$. Ein Flach ζ schneidet $F_2^{N_n-1}$ in einer Kurve Q^{N_n-1} , dem Bilde einer Kurve $Q^{n+1}(\zeta)$ des linearen Systems der ∞^{n+1} Kurven $(n+1)$ -ter Ordnung durch das Punktsystem $P_{N_n}^2$. Hält man in den drei Gleichungen $\alpha_i(\beta y)(\gamma z) = 0$ den Punkt y fest, so erhält man im Raume $[z]$ einen Raum $z[n-2]_y$. Die so entstehenden ∞^n Räume sind N_{n-2} -Sekanten-Räume von $F_2^{N_n-1}$ und der Kurven $Q^{N_n-1}(\zeta)$ von $F_2^{N_n-1}$. Hält man in den drei Gleichungen z fest, so erhält man in $[y]$ einen Raum $y[n-3]_z$. Ist aber z^0 speziell ein Punkt von $F_2^{N_n-1}$ (Bild von x^0 in $[z]$), so ergibt sich ein Raum $y[n-2]_{z^0}$. Die ∞^2 Räume dieser Art werden Räume von Semples genannt. Die Sempleräume sind die N_{n-2} -Sekanten-Räume der ∞^{n+1} Kurven $S^{N_n-1}(\zeta)$ durch $Q_{N_n}^n$. Folgende Eigenschaft der Sempleskongruenz gibt zugleich eine Lösung des klassischen Problems der Projektivität: Ist ϱ^0 der Semples- $[n-2]$ im Raume $[n]$ der $[y]$, der dem Punkte x^0 der Ebene entspricht, dann sind die N_n Räume des durch ϱ_0 bestimmten Büschels, die ϱ_0 mit den Punkten von $Q_{N_n}^n$ verbinden, projektiv zu den N_n Geraden des Büschels um x^0 , die x^0 mit den Punkten von $P_{N_n}^2$ verbinden. Die Ordnung der Sempleskongruenz ist N_{n-2} . Von den beiden geordneten Punktsystemen $P_{N_n}^2, Q_{N_n}^n$ können $2n+1$ Punktepaare p_h, q_h willkürlich gewählt werden; die übrigen sind dann eindeutig bestimmt.

E. A. Weiss (Bonn).

Coble, Arthur B.: Conditions on the nodes of a rational plane curve. Duke math. J. 7, 396—410 (1940).

Anwendung der Ergebnisse der vorstehend besprochenen Arbeit. Eine ebene rationale Kurve $\varrho_2^{n+3}(t)$ der Ordnung $n+3$ hat ein System von $N_n = \binom{n+2}{2}$ Doppelpunkten p_h , ein System $P_{N_n}^2$. Für $n < 3$ können diese Doppelpunkte beliebig vorgegeben werden. Für $n = 3$ müssen die 10 Doppelpunkte drei zuerst von Valentiner bemerkten Bedingungen genügen [vgl. A. B. Coble, The ten nodes of the rational sextic and of the Cayley symmetroid; Amer. J. Math. 41, 243—265 (1919)]. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die entsprechenden Bedingungen für beliebiges n zu finden. Die Kurve sei durch $(\alpha\xi)(\alpha t)^{n+3} = 0$ gegeben, wo ξ ternäre Linienkoordinaten bezeichnet. Eine rationale Kurve ν -ter Klasse werde durch $(\beta x)(\gamma t)^\nu = 0$ dargestellt. Die beiden Kurven heißen perspektiv, wenn $(\alpha\beta)(\alpha t)^{n+3}(\gamma t)^\nu \equiv 0$. Die Forderung, daß $\varrho_2^{n+3}(t)$ einen perspektiven Kegelschnitt erhält, verlangt die Erfüllung von $n-2$ Bedingungen von $\varrho_2^{n+3}(t)$ [A. B. Coble, Symmetric binary forms and involutions III.; Amer. J. Math. 32, 355—364 (1910)]. Es werden nur Kurven betrachtet, die diesen Bedingungen nicht genügen. Ist dann $(k_h t)^2$ die quadratische Form, deren Nullstellen die Parameter der rationalen Kurve in einem ihrer Doppelpunkte p_h sind, so ordne man dieser Form mittels eines Grundkegelschnitts nach dem Hesseschen Übertragungsprinzip einen Punkt n_h zu. Die Punkte n_h erfüllen ein Punktsystem $P_{n+2,2}^2$. Dieses System ist zum Punktsystem $P_{n+2,2}^2$ nicht projektiv. Mit Hilfe der durch $(\alpha\xi)(\alpha t)^{n+3} = 0$ gegebenen Kurve $\varrho_2^{n+3}(t)$ wird nun im Raume $[y] = [n]$ ein „konjugierter“ rationaler Ort $(n+3)$ -ter Klasse von Räumen $[n-1]$ definiert $(\beta y)(\varepsilon t)^{n+3} = 0$, derart, daß $(\alpha\xi)(\alpha\varepsilon)^{n+3}(\beta y) \equiv 0 \{ \xi, y \}$. Die Bedingungen dafür, daß $(\beta y)(\varepsilon t)^{n+3}$ eine apolare Form 2., 3., ... Ordnung besitzt, definieren für y „katalektische Orte Σ_{2k} “ ($2k$ ist die Dimension, $\binom{n+2-k}{k+2}$ die Ordnung von Σ_{2k}). Insbesondere besteht Σ_0 aus einem System von $\binom{n+2}{n}$ Punkten q_h von $[n]$, den Punkten $Q_{n+2,2}^n$, die den Doppelpunkten

p_h von $\varrho_2^{n+3}(t)$ eindeutig zugeordnet sind. Durch Polarisation entsteht aus $(\beta y)(\varepsilon t)^{n+3}$ die Form $(\beta y)(\varepsilon t_1)(\varepsilon t_2)(\varepsilon t)^{n+1}$. Ordnet man hier dem Punktpaar t_1, t_2 vermöge des Hesseschen Übertragungsprinzips einen Punkt x' einer Kegelschnittebene zu, und deutet man die Potenzen von t als Koordinaten eines Punktes z' einer rationalen Normalkurve N^{n+1} im $[n+1]$, so entsteht die Form $T'(2, n, n+1) = (\alpha' x')(\beta' y)(\gamma' z')$. Diese trilineare Form hat als neutrale Punktpaare x', y das System der Punkte $P_{n+2,2}^{n+2}$ und das katalektische Punktsystem $Q_{n+2,2}^n$. Eine zweite trilineare Form $T(2, n, n+1)$ wird mit Hilfe der zu $\varrho_2^{n+3}(t)$ perspektiven Kurven $(n+1)$ -ter Klasse definiert und hat als neutrale Punktpaare x, y das System der Doppelpunkte $P_{n+1,2}^2$ der Kurve $\varrho_2^{n+3}(t)$ und das katalektische Punktsystem $Q_{n+2,2}^n$. Wegen der Existenz von T und T' kann die Ebene von $\varrho_2^{n+3}(t)$ so auf eine Veronesesche Fläche $V_2^{(n-1)^3}$ des Raumes $\left[\binom{n+1}{2} - 1\right]$ abgebildet werden, daß dem System der Doppelpunkte P ein Punktsystem R entspricht, durch das eine zweite Veronesesche Fläche $V_2'^{(n-1)^3}$ läuft. Dabei ist R auf V' das Bild des Punktsystems P' . Dieser Satz gibt die gesuchten Bedingungen. Die Bedingungen sind im Falle $n=3$ hinreichend. Daß sie auch im Falle $n>3$ hinreichend sind, ist unwahrscheinlich, weil durch die Symmetrie des Satzes zwei rationale Kurven mit Doppelpunkten P und P' einander zugeordnet zu werden scheinen, und eine solche Zuordnung rationaler Kurven (außer im Falle $n=3$) nicht bekannt ist. Die durch die beiden durch R laufenden Veroneseschen Flächen bestimmte Koordinatentransformation.

E. A. Weiss (Bonn).

Gambier, Bertrand: Couples de tétraèdres de Möbius. Ann. Ecole norm., III. s. 56, 71—118 (1939).

Der Ausgangspunkt der vorliegenden eingehenden Untersuchung über Möbiussche Tetraederpaare ist in folgendem, von R. Sturm bewiesenem, aber nicht weiter entwickeltem, Satze zu finden: Sind $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ zwei Tetraeder in Möbiusscher Lage, so gibt es zwei getrennte Geraden Δ, Δ' , die die vier Geraden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 schneiden und von den vier Punktpaaren AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 harmonisch getrennt werden. Aus diesem Satze folgt sofort eine Konstruktion des Tetraederpaares, welche unmittelbar zeigt, daß das Paar von 17 willkürlichen Konstanten abhängt: auf einer Quadrik q wählt man beliebig zwei Erzeugende Δ, Δ' derselben Schar; ein beliebiges Polartetraeder $ABCD$ von q und das in der involutorischen Homographie (Δ, Δ') ihm entsprechende Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ liefern das allgemeinste Möbiussche Paar. Die drei neuen Tetraederpaare $ABCD, B_1A_1D_1C_1$; $ABCD, C_1D_1A_1B_1$; $ABCD, D_1C_1B_1A_1$ sind in bezug auf q polar, so daß die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zu drei neuen Quadriken $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ führen; diese Quadriken spielen hier eine wichtige Rolle; sie sind den beiden Tetraedern gleichzeitig um- und einbeschrieben; sie sind paarweise harmonisch um- und einbeschrieben. Diese ersten Sätze liefern dann eine Menge anderer Eigenschaften, die hier nur teilweise besprochen werden können: Es gibt höchstens 4 paarweise in Möbiusscher Lage liegende Tetraeder; man erhält sie aus der vorigen Konstruktion, wenn auf der Quadrik q drei Erzeugendepaare Δ, Δ' wählt, die sich paarweise harmonisch trennen. Im allgemeinen gibt es kein Möbiussches Tetraederpaar, das einer Quadrik Q eingeschrieben und einer anderen Quadrik Q_1 umbeschrieben ist; die Bedingung für die Existenz eines solchen Paares ist, daß die Wurzeln λ_i der Diskriminantengleichung des Büschels $Q - \lambda Q_1 = 0$ die Beziehung $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$ erfüllen; es gibt dann ∞^4 solche Paare. Es gibt ∞^3 Möbiussche Tetraederpaare, die einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art einbeschrieben sind; unter solchen gibt es ∞^2 , die einer Quadrik Q_1 und ∞^1 , die einer Torse 4. Klasse 1. Art umbeschrieben sind usw. Die Beweismethoden sind größtenteils synthetisch mit analytischen Erläuterungen; verschiedene hier benutzte Eigenschaften der Möbiusschen Tetraederpaare können in einer früheren Arbeit des Verf. gefunden werden (vgl. dies. Zbl. 18, 229).

E. G. Togliatti (Genova).

Lunell, Einar: Liniengeometrische Studien, mit besonderer Rücksicht auf Regelflächen mit vollständigem Zerfalle der Doppelkurve. Uppsala: Diss. 1940. 162 S.

Die Arbeit schließt an zwei Untersuchungen von A. Wiman (Acta math. 57, 341—387; 59, 1—62; dies. Zbl. 3, 24—25; 4, 363) an, und wendet sich zunächst in einem breitangelegten 1. Kapitel den birationalen Abbildungen der Mannigfaltigkeiten der Liniengeometrie, insbesondere der rationalen Komplexe, und ihrer Verwendung für die Untersuchung der Regelflächen zu. Schon A. Wiman hat in seiner Dissertation (Lund 1892) die Regelflächen sechsten Grades R_6 mittels Abbildung der einfachsten sie enthaltenden Komplexe (die sämtlich rational sind) auf den Punkttraum untersucht und klassifiziert. Allgemein werden durch (birationale) Abbildung eines allgemeinen rationalen Komplexes auf einen Punkttraum die Punkte und Ebenen (als Linienörter des Komplexes) übertragen auf Kurvenkomplexe (C) bzw. (C'), und der einfachste und bequemste Fall wird jener sein, wo einer oder beide dieser Kurvenkomplexe wieder geradlinig sind. Die Abbildung stellt dann, wie es Lie genannt hat, eine polare Beziehung zwischen den Komplexen her, und es sind drei Fälle möglich: Entweder handelt es sich um zwei Kollineationskomplexe, oder um einen linearen und den der Treffgeraden eines Kegelschnitts oder um zwei Strahlgebüsche, wie ebenfalls schon Lie festgestellt hat. Von den zugehörigen Abbildungen studiert der Autor ausführlicher insbesondere die polare Beziehung des linearen Komplexes auf den Sekantenkomplex eines Kegelschnitts (Noether-Liesche Übertragung, Lies Geraden-Kugeltransformation) und die im Sinne der Geometrie auf F. Kleins M_4^2 der Liniengeometrie „stereographische“ Abbildung des Strahlgebüsches auf den Punkttraum (Eulersche Transformation, vgl. E. A. Weiss, dies. Zbl. 15, 75). — Deutet man (Kap. 2) die Regelflächen R_n als Kurven auf Kleins M_4^2 , so läßt sich Castelnuovos Theorem über das Maximalgeschlecht von Kurven zur Bestimmung des Maximalgeschlechtes der Regelflächen R_n einer gegebenen Ordnung n verwenden. Bezeichnet $[a]$ die größte ganze Zahl in a , so ist dies Höchstgeschlecht der R_n a) im allgemeinen Falle: $[\frac{1}{2}(n-3)^2]$, b) wenn sie einem linearen Komplex angehört: $[\frac{1}{2}(n-2)(n-3)]$, c) wenn sie in einem Strahlnetz liegt: $[\frac{1}{2}(n-2)^2]$, und es gibt wirklich auch für jedes n Flächen dieser Geschlechter. Sie gehören, von einigen genau angebbaren Ausnahmefällen niedriger Ordnungen abgesehen, a) einer Kongruenz (2, 2) oder (1, 3) an (dual) oder b) einer Kongruenz (1, 2) an (dual), die konstruiert werden. Anwendung auf die Bestimmung der Haupttypen der Flächen R_n vom Höchstgeschlecht. — Jene Erzeugendenpaare der Regelfläche, die mit Punkten der Doppelkurve (dual Ebenen der Doppeltorse) inzidieren, bestimmen eine symmetrische $(n-2, n-2)$ -Korrespondenz der Wertigkeit 2, die Hauptkorrespondenz, die zum eigentlichen Träger aller weiteren Untersuchungen wird. Durch Wimans Abbildung der Regelfläche überträgt sie sich auf eine ebensolche Hauptkorrespondenz T_B zwischen den Punkten der birationalen Bildkurve der Fläche oder auf die zugehörige Bisekantenfläche dieser Kurve. — Kapitel 3 beschäftigt sich nun eingehend mit allgemeinen Korrespondenzen auf Kurven und den zugehörigen Bisekantenflächen. Gestützt auf grundlegende Korrespondenzformeln der algebraischen Geometrie werden Formeln für Ordnung und Geschlecht der erzeugten Regelflächen abgeleitet, und diese dann auf den Fall der Hauptkorrespondenz angewandt, wodurch sich für die R_n vom Geschlecht p als Zahl der Torsalen $\tau = 2(n-2) + 4p$, als Zahl der dreifachen Punkte und Ebenen $t = \binom{n-2}{3} - (n-4)p$ und als Geschlecht der Doppelkurve $p = \frac{1}{2}(n-3)(n-4) + (n-5)p - f$ ergibt, falls f die Zahl der f -fachen Punkte bedeutet. Diese grundlegenden Formeln modifizieren sich in genauer präzisierter Weise im Falle einer zerfallenden Hauptkorrespondenz und bei Auftreten mehrfacher Leitkurven. Eine Betrachtung der Abbildung der Sehnenkongruenz einer Raumkurve und der nichtinvolutorischen Korrespondenzen leitet über zu dem zentralen Kapitel 4 über den vollständigen Zerfall der Hauptkorrespondenz der Regelflächen (in lauter involutorische (1, 1)-Korrespondenzen J), der für die Fläche einen vollständigen Zerfall der Doppelkurve (in $n-2$ -Leitkurven) bedeutet. Die zugeordneten Paare dieser Teilkorrespondenzen J bilden dabei Paare einer γ_1^2 , die als ein Hauptmittel der Untersuchungen dienen. Ausführlich wird das Auftreten von vielfachen Leitkurven behandelt. Es wird eine notwendige Bedingung für den Zerfall der Hauptkorrespondenz aufgestellt, und in einer Reihe von Sonderfällen werden auch hinreichende Bedingungen angegeben. Insbesondere wird eine Anzahl von rationalen Flächen R_n niedriger Ordnungen ($n \leq 8$) mit vollständigem Zerfalle der Hauptkorrespondenz angegeben und erläutert, warum solche im Falle $n > 9$ unwahrscheinlich sind. Der Fall $n = 9$ bleibt offen. Ausführlich wird insbesondere der hyperelliptische Fall diskutiert. Das letzte Kapitel ist eingehenden Anwendungen der allgemeinen Resultate auf Regelflächen mit einer Leitgeraden und solchen mit Leitkegelschnitt gewidmet, wobei als Untersuchungsmittel die eingangs erwähnte stereographische Abbildung und die Lie-Noethersche Übertragung der Kegelschnittsektanten auf den linearen Komplex und nachfolgende Abbildung auf den Punkttraum dienen. Eine große Anzahl sehr interessanter Möglichkeiten des Zerfalles, auch im Falle beliebig hohen Geschlechtes, kann dabei beschrieben werden.

K. Strubecker (Wien).

Spampinato, N.: Gli S_1 proiettivi legati alle algebre doppie reali dotate di modulo e loro rappresentazione. Esercitazioni Mat. 13, 1—27 (1941).

Eine Elementgesamtheit heißt ein projektiver bireeller oder komplexer oder dualer Raum S_1 , wenn ihre Elemente ausnahmslos eineindeutig den Paaren bireeller, komplexer oder dualer Zahlen vom Range 2, die abgesehen von einem nicht verschwindenden und nicht nullteilenden Faktor definiert sind, zugeordnet werden können. Bezüglich der Algebren der bireellen, komplexen und dualen Zahlen vgl. Spampinato, dies. Zbl. 23, 103. Verf. beweist, daß jede reelle Geradenkongruenz der Ordnung 1 des gewöhnlichen Raumes ein bireeller, komplexer oder dualer S_1 ist, und zwar stellt die hyperbolische Kongruenz, die von den ∞^2 reellen Geraden, die zwei vorgegebene reelle windschiefe Geraden treffen, gebildet wird, einen projektiven bireellen S_1 dar; die aus den ∞^2 reellen Geraden, welche konjugierte Punktepaare auf zwei konjugiert imaginären Geraden zweiter Art verbinden, gebildete elliptische Kongruenz ist ein projektiv komplexer S_1 ; schließlich stellt die parabolische Kongruenz, die man nach Vorgabe einer Projektivität ω zwischen den Punkten einer reellen Geraden a und den Ebenen des Büschels mit der Achse a erhält, indem man die ∞^2 reellen Geraden betrachtet, die durch die Punkte von a gehen und gleichzeitig den ihnen in ω entsprechenden Ebenen angehören, einen projektiven dualen S_1 dar. — Weiterhin zeigt Verf., daß eine reelle Quadrik des gewöhnlichen Raumes ein bireeller oder komplexer projektiver S_1 ist, je nachdem ihre Punkte hyperbolisch oder elliptisch sind; schließlich bilden die einfachen Punkte eines reellen quadratischen Kegels einen projektiven dualen S_1 .

Mario Villa (Bologna).

Blaschke, Wilhelm: Contributi alla geometria analitica degli spazi di Hermite. Atti Accad. Italia, VII. s. 1, 224—227 (1940).

Verf. hat schon mehrmals die Hermiteschen Räume untersucht (dies. Zbl. 21, 263; 22, 381; 23, 165, 263). In vorliegender Arbeit untersucht er den elliptischen Raum H_{2n} , für dessen Punkte $\sum x_k \bar{x}_k > 0$ gilt, und sucht bezüglich der Hermiteschen Bewegungsgruppe die gemeinsamen Invarianten zweier Normalketten N_s, N_t . Ist $s = 0, t = 1$, so gibt es zwei Invarianten; hingegen erhält man für $s = t = 1$ deren vier. Die Bedeutung ihres Verschwindens wird entwickelt.

E. Bompiani (Roma).

Srb, Jan: Eine lineare Konstruktion der quadratischen Hyperfläche des n -dimensionalen Raumes aus $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkten. Čas. mat. fys. 70, 53—64 u. dtsh. Zusammenfassung 64—67 (1941) [Tschechisch].

Es handelt sich um eine lineare und eine quadratische Konstruktion der durch $n(n+3)/2$ gegebene Punkte hindurchgehenden quadratischen Hyperfläche V_{n-1}^2 im n -dimensionalen Raume. Den Ausgangspunkt bildet die folgende Überlegung. Man verteile die gegebenen Punkte in n Gruppen zu je $\frac{(n-1)(n+2)}{2} + 2$ Punkten in der Weise, daß sich je zwei Gruppen wenigstens in einem Punkte unterscheiden. Die Punkte jeder Gruppe bestimmen ein lineares System von quadratischen Hyperflächen der Dimension $n-1$, so daß die Polarhyperebenen eines Punktes P in bezug auf die quadratischen Hyperflächen des Systems sich in einem Punkte Q schneiden. Die dem Punkte P in dieser Weise zugeordneten Punkte Q_1, \dots, Q_n sind linear unabhängig und liegen in der Polarhyperebene der V_{n-1}^2 .

O. Borůvka (Brünn).

Chisini, Oscar: Sulla rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di un punto cuspidale della curva di diramazione. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 73, 428—434 (1940).

Verf. gibt hier die Reihenentwicklung einer algebraischen Funktion zweier Veränderlicher in der Umgebung einer Spitze der Verzweigungskurve. Es sei $F(xyz) = 0$ die algebraische Gleichung, die die algebraische Funktion $z = z(xy)$ definiert; es sei $A(x = y = 0)$ eine Spitze der Verzweigungskurve $D(xy) = 0$, so daß die Spitzen-

tangente mit $y = 0$ zusammenfallen. In einer Umgebung von A hat man:

$$y = b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + \sqrt{x}(c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = \psi(x) + \varphi(x) \cdot \sqrt{x};$$

oder: $[y - \psi(x)]^2 = x\varphi^2(x) = P^3(x)$; in einer Umgebung von A kann also $D(xy)$ folgendermaßen ausgedrückt werden: $D = Q^2(xy) - P^3(x) = 0$. Die kubische Gleichung: $\eta^3 - 3P\eta + 2Q = 0$ liefert dann eine algebraische Funktion $\eta(xy)$; und z ist eine reguläre Funktion von x und η : $z = \sum C_{rs} x^r \eta^s$. *E. G. Togliatti* (Genova).

Morin, Ugo: Sulla razionalità dell'ipersuperficie cubica generale dello spazio lineare S_5 . Rend. Semin. mat. Univ. Padova 11, 108—112 (1940).

Die Arbeit erbringt den eleganten Beweis dafür, daß die allgemeine V_4^3 des S_5 rational ist. Dazu wird bewiesen, daß diese V_4^3 eine rationale normale Regelfläche 4. Ordnung V_2^4 enthält, deren Sehnen dann eineindeutig den Punkten der V_4^3 entsprechen; der Nachweis erfolgt durch Dimensionsbetrachtungen. Die V_4^3 bilden ein Linearsystem der Dimension 55; die rationalen normalen Regel- V_2^4 des S_5 , die als Leitkurven kleinster Ordnung ∞^1 Kegelschnitte besitzen, also aus den Verbindungsgeraden projektiv entsprechender Punkte zweier allgemeiner Kegelschnitte bestehen, bilden ein irreduzibles algebraisches System Φ der Dimension 29, das das System der Paare von V_2^2 mit einer gemeinsamen Erzeugenden (Dimension 28) umschließt. Eine V_4^3 enthält eine V_2^4 genau dann, wenn sie durch 28 allgemeine Punkte der letzteren geht. Da nun durch zwei allgemeine V_2^4 keine V_4^3 geht und zwei V_2^4 , die einen Punkt gemein haben, im allgemeinen genau einer V_4^3 angehören, muß die allgemeine V_4^3 ∞^1 solcher V_2^4 enthalten und daher rational sein. *Harald Geppert* (Berlin).

Villa, Mario: Sulle superficie quasi-asintotiche della V_4^6 di S_8 che rappresenta le coppie di punti di due piani. Atti Accad. Italia, VII. s. 1, 228—237 (1940).

Eine in einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit V_k gelegene Fläche heißt eine Quasiasymptotik $\sigma_{1,2}$, wenn in jedem ihrer Punkte ihr schmiegender S_2 und der daselbst V_k berührende S_k einen Verbindungsraum der Dimension $d < k + 3$ besitzen [Bompiani, Proceedings of the fifth Int. Congr. of Math. 2 (1912)]. Verf. unterscheidet drei Arten solcher $\sigma_{1,2}$, je nachdem $d = k + 2$ oder $= k + 1$ oder $= k$ ist; er zeigt, daß die die Punktpaare zweier Ebenen darstellende V_4^6 des S_8 solche $\sigma_{1,2}$ aller drei Arten besitzt, die die ausartenden Korrespondenzen der drei möglichen Typen zwischen den beiden Ebenen darstellen. Überdies sind die $\sigma_{1,2}$ der ersten beiden Klassen auf V_4^6 genau diejenigen Flächen, die ein bzw. zwei Büschel ebener Kurven enthalten, deren Ebenen in V_4^6 liegen; die zum gleichen Büschel gehörenden Ebenen und nur diese gehören der gleichen Schar an. Zu den $\sigma_{1,2}$ der V_4^6 gehören auch die ∞^4 Quadriken des S_3 , die die Punktpaare zweier auf den beiden Ausgangsebenen gelegenen Geraden darstellen. Verf. beweist, daß die Eigenschaft, ∞^4 Flächen des S_3 als $\sigma_{1,2}$ zu besitzen, die V_4^6 unter den nicht kegelförmigen, einem Raum der Dimension > 7 angehörigen V_4 kennzeichnet. *P. Buzano* (Torino).

Differentialgeometrie:

Ionescu-Bujor, C.: Extension analytique de la tangente à une courbe. Gaz. mat. 46, 245—249 (1941) [Rumänisch].

On associe à un point $m[x, f(x)]$ d'une courbe la droite mP de coefficient angulaire $\varphi(x)$, puis au point $\mu[x, \varphi(x)]$ la droite μP de coefficient angulaire $f(x)$. Propriétés, résultant d'un calcul élémentaire, de la configuration formée par les éléments considérés et par les axes des coordonnées. *Al. Pantazi* (Bucarest).

Foşcaneanu, Mihail I.: Une construction des centres de courbure de certaines courbes planes. Gaz. mat. 46, 241—245 (1941) [Rumänisch].

On établit les relations entre les coordonnées de deux points m, M de deux courbes planes en correspondance, lorsque le centre de courbure en M s'obtient de m par une construction géométrique donnée. On déduit deux constructions pour les centres de courbure aux points d'une parabole. *Al. Pantazi* (Bucarest).

Schatz, Heinrich: Über Kreisscharen in der Ebene und Kugelscharen im Raum. Mh. Math. Phys. 49, 247—260 (1940).

Es werden elementar die Krümmungskreise der beiden Einhüllenden einer einparametrischen Kreisschar berechnet und gezeigt, daß die Mittelpunkte der Kreise, die zwei Kreise berühren, auf einer Ellipse liegen. Jedem Kreis einer Kreisschar läßt sich also eine Ellipse zuordnen, nämlich diejenige, auf der die Mittelpunkte der Kreise liegen, die die Krümmungskreise der Einhüllenden berühren. Dasselbe macht Verf. dann im Raum. *Knothe (Berlin).*

Maeda, Jusaku: Geometrical meanings of the inversion curvature of a plane curve. Jap. J. Math. 16, 177—232 (1940).

Verf. betrachtet Loxodromen, die sich einer ebenen Kurve anschmiegen. Verlangt man von einer Loxodrome vorgegebenen Trajektorienwinkels γ , daß sie vier konsequente Punkte mit einer Kurve gemein haben soll, so gibt es ∞^1 Loxodromen, die dies leisten. Ihre Pole liegen nach Thomsen auf zwei Kreisen. Man erhält so zwei inversionsinvariant mit der Kurve verbundene Kreise. Fordert man von einer Loxodrome mit gegebenem γ fünfpunktige Berührung, so ist sie eindeutig bestimmt. Bei willkürlichem γ wird diese eindeutige Bestimmtheit erst bei der Forderung sechspunktiger Berührung erreicht. Mit Hilfe der Pole dieser Loxodromen und dem entsprechenden Linienelement der Kurve lassen sich natürlich viele Kreise inversionsgeometrisch mit der Kurve verknüpfen. Durch Betrachtung der Schnittwinkel solcher Kreise und ihrer Konsekutiven gelangt Verf. zu verschiedenen geometrischen Deutungen der Inversionskrümmung. Er stellt weiter die Bedingungen dafür auf, daß irgendwelche dieser Kreise durch einen Punkt gehen oder aus den Schmiegekreisen einer Kurve bestehen. *Knothe (Berlin).*

Maeda, Jusaku: On some osculating figures of a plane curve, and on sections of a surface by planes passing through a fixed tangent. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 29, 163—203 (1940).

Verf. betrachtet in einem regulären Punkte P einer ebenen Kurve C verschiedene Arten bestschmiegender Kurven, z. B. Doppelspiralen (d. h. isogonale Trajektorien der durch zwei feste Punkte gehenden Kreisschar), isogonale Trajektorien einer konfokalen Schar von Kegelschnitten oder Cassinischen Ovalen, Zykloiden, Epizykloiden, Schleppkurven und Kettenlinien, und kennzeichnet deren besondere Punkte und Elemente in ihrem Verhältnis zu P , der Krümmung von C und ihren Ableitungen. Bezeichnet Z_n den durch Streckung im Verhältnis $n:1$ von P aus dem Krümmungszentrum Z_1 entstehenden Punkt, so gehen z. B. die Leitgeraden der C in P dreipunktig berührenden Kettenlinien durch Z_{-1} , die Basisgeraden der dreipunktig berührenden Zykloiden durch $Z_{\frac{1}{2}}$; die Mittelpunkte der dreipunktig berührenden Hypo- und Epizykloiden liegen auf einer bestimmten Parallelen zur Tangente an C in P usw. — Betrachtet man die Ebenenschnitte einer Fläche durch eine nicht asymptotische Tangente in einem regulären Punkt und dazu die oben geschilderten Schmiegegebilde, so ergeben sich für deren besondere Punkte bei Drehung des Schnittes einfache geometrische Örter; z. B. beschreiben die Mittelpunkte der schmiegenden Hypo- und Epizykloiden eine Ellipse, die Leitgeraden der schmiegenden Kettenlinien eine Quadrik. — Eine umfangreiche Sammlung ähnlicher Sätze. *Harald Geppert (Berlin).*

König, Robert, und Karl Heinrich Weise: Zur konformen Abbildung zweier Flächen mit beliebigen Parametern. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 92, 19—32 (1940).

Verff. behandeln das Problem der konformen Abbildung zweier Flächen unter Zugrundelegung beliebiger Flächenparameter. Die Fläche F (zweidimensionale Mannigfaltigkeit) sei auf ein Parametersystem u^α ($\alpha = 1, 2$) bezogen; sie sei „im Kleinen linear“, d. h. in jedem Flächenpunkte eines Bereiches B läßt sich ein beliebiges Linienelement $d\vec{s}$ in der Form darstellen $d\vec{s} = du^\alpha t_\alpha$ (über gleiche Indizes in verschiedener Stellung ist zu summieren); ferner trage F eine Riemannsche Metrik, d. h. es sei $|d\vec{s}|^2 = ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$. In einem Punkt P wird durch die Einführung eines Ein-

heitsvektors \mathfrak{v} für die Nullrichtung jeder Richtung ein Argument φ zugeordnet, so daß für das Linienelement $d\tilde{s}$ neben dem absoluten Betrag ds noch ein Argument φ erhalten wird; für den Netzwinkel ω der Parameterlinien erhält man dann: $\omega = \varphi_2 - \varphi_1$,

$$\cos \omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{|g_{\alpha\beta}|}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}. \quad \text{Ein Bereich } B \text{ der Fläche } F \text{ werde nun eindeutig}$$

umkehrbar auf einen Bereich \tilde{B} der Fläche \tilde{F} , die die gleichen Eigenschaften habe wie F , abgebildet; es sei $\tilde{u}^\alpha = v^\alpha$, $\tilde{g}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}$. Dem Parameternetz $\mathfrak{N}(u^\alpha)$, angezeigt durch die Linienelemente $(d\tilde{s}_1, d\tilde{s}_2)$ entspricht ein Bildnetz \mathfrak{N}^* mit den Bildrichtungen $d\tilde{s}_1^*, d\tilde{s}_2^*$; die Winkel $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha - \tilde{\varphi}_\alpha$ geben die Verschwenkung der Netzkurven bei der Abbildung $F \rightarrow \tilde{F}$ auf der Bildfläche \tilde{F} an. Die Forderung der Konformität der Abbildung $B \leftrightarrow \tilde{B}$ besteht in den zwei Bedingungen: a) $ds^{*2} = m^2(P)ds^2$, b) $\varphi = \tilde{\varphi} + \chi(P)$, wobei das „Vergrößerungsverhältnis“ m und die Argumentänderung χ Funktionen des Ortes sind; für die Verschwenkung der Netzkurven folgt $\gamma_2 - \gamma_1 = \omega - \tilde{\omega}$. Die Lage des Bildnetzes \mathfrak{N}^* auf \tilde{F} ist daher durch $\gamma_1 = \gamma$ („Netzverschwenkung γ “) allein bestimmt. Die Forderungen a) und b) sind nicht unabhängig; aus a) folgt b) und umgekehrt, wie gezeigt wird. Zwischen den Daten der Parameternetze (Netzwinkel und Bogenelemente der Netzkurven) und denjenigen der konformen Abbildung (m, γ) besteht ein System von 4 Gleichungen; die Elimination von m, γ ergibt in „geometrischer“ Gestalt die Verallgemeinerung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen als notwendige Bedingungen für die Konformität der Abbildung $F \leftrightarrow \tilde{F}$. Die Einführung der Abbildungsfunktionen $v^\alpha = v^\alpha(u_1, u_2)$ führt zu einem System von Differentialgleichungen, welche in „analytischer“ Gestalt die gesuchte Verallgemeinerung darstellen und die Cauchy-Riemannschen (beide Parameternetze sind isotherm) und die Beltramischen (auf \tilde{F} ist das Parametersystem v^α isotherm) Gleichungen als Sonderfälle enthalten. Die Frage nach dem Transformationsverhalten dieser Gleichungen beim Übergange zu andern Flächenparametern wird durch eine tensorielle Form der Gleichungen beantwortet. Endlich wird die Frage nach den „Integrabilitätsbedingungen“, d. h. nach der Verallgemeinerung der Laplaceschen Gleichung, gestellt und gezeigt, daß man sie als Eulersche Gleichungen eines Variationsproblems, das als Verallgemeinerung des Dirichletschen Problems anzusehen ist, erhalten kann; sie lassen sich aber nicht in für die gesuchten Funktionen v^α getrennte Gleichungen zerlegen.

Volk (Würzburg).

Weise, Karl Heinrich: Bemerkung zur Abbildung zweier Flächen. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 92, 45—50 (1940).

Verf. gibt unter Klarstellung der z. T. recht verschwommenen Begriffsbildungen unter Zugrundelegung beliebiger Parameterlinien eine Ableitung des Tissotschen Satzes über die Abbildung zweier Flächen [Sur les cartes géographiques; C. R. 49, 673 (1859)]. Tragen die aufeinander abzubildenden Flächenstücke F und \tilde{F} jeweils eine Riemannsche Metrik: $ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$, $d\tilde{s}^2 = h_{\alpha\beta} dv^\alpha dv^\beta$, und ist das Abbildungsgesetz linear im Kleinen, d. h.

$$(1) \quad dv^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta,$$

wird ferner die Nullrichtung in jedem Flächenpunkt durch einen Einheitsvektor \mathfrak{v} gegeben, so daß jedem gerichteten Linienelement $d\tilde{s}$ ein absoluter Betrag ds und ein Argument φ zukommt:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad ds \cos \varphi = du^1 \sqrt{g_{11}} \cos \varphi_1 + du^2 \sqrt{g_{22}} \cos \varphi_2, \\ ds \sin \varphi = du^1 \sqrt{g_{11}} \sin \varphi_1 + du^2 \sqrt{g_{22}} \sin \varphi_2,$$

so ergibt die Auflösung noch du^1, du^2 unter Verwendung des Netzwinkels $\omega = \varphi_2 - \varphi_1$:

$$du^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} ds \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi)}{\sin \omega}, \quad du^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} ds \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin \omega}.$$

Analoges gilt für die Fläche \tilde{F} . Bezeichnet man die Bilder mit einem *, so läßt sich das Abbildungsgesetz (1) in Argument und Bogenelement („Polarkoordinaten im Kleinen“) so ausdrücken:

$$\frac{1}{\sqrt{h_{11}}} ds^* \frac{\sin(\tilde{\varphi}_2 - \varphi^*)}{\sin \tilde{\omega}} = \frac{\partial v^1}{\partial u^1} \frac{ds}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi)}{\sin \omega} + \frac{\partial v^1}{\partial u^2} \frac{ds}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin \omega},$$

$$\frac{1}{\sqrt{h_{22}}} ds^* \frac{\sin(\varphi^* - \tilde{\varphi}_1)}{\sin \omega} = \frac{\partial v^2}{\partial u^1} \frac{ds}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi)}{\sin \omega} + \frac{\partial v^2}{\partial u^2} \frac{ds}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin \omega}.$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich in die endlichen Gleichungen für das Vergrößerungsverhältnis bei der Abbildung $m = \frac{ds^*}{ds}$ und das Bildargument überführen:

$$(2) \quad m^2 = \frac{1}{\sin^2 \omega} [\lambda_1^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0) + \lambda_2^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)], \quad \text{tg}(\varphi^* - \varphi_0^*) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \text{tg}(\varphi - \varphi_0),$$

wo $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$, φ_0, φ_0^* leicht bestimmbar sind. Umgekehrt gilt, wenn man von

$$(3) \quad du^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^\beta} dv^\beta$$

ausgeht:

$$(4) \quad \frac{1}{m^2} = \frac{1}{\sin^2 \tilde{\omega}} [\tilde{\lambda}_1^2 \cos^2(\varphi^* - \varphi_0^*) + \tilde{\lambda}_2^2 \sin^2(\varphi^* - \varphi_0^*)], \quad \text{tg}(\varphi - \varphi_0) = \frac{\tilde{\lambda}_2}{\tilde{\lambda}_1} \text{tg}(\varphi^* - \varphi_0^*).$$

Trägt man m, φ^* als Polarkoordinaten in einer Ebene auf, so stellt die erste Gleichung (4) eine Ellipse mit dem Achsenverhältnis $\tilde{\lambda}_1 : \tilde{\lambda}_2$, die Tissotsche Indikatrix, dar. Die Breite gibt die Zuordnung der Argumente durch die Konstruktion einer Ellipse aus einem Kreis mit dem Radius $\frac{\sin \tilde{\omega}}{\tilde{\lambda}_1} = \frac{\lambda_1}{\sin \omega}$ durch Verkürzung der Ordinaten. Damit ist die

Verzerrung bei der Abbildung im Kleinen vollständig erklärt. Für die konforme Abbildung ist $\lambda_1 = \lambda_2$; man wird auf die verallgemeinerten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in allgemeinsten Art geführt. Durch spezielle Wahl der Nullrichtungen ergeben sich die früher vom Verf. und R. König (vgl. vorstehendes Referat) abgeleiteten Gleichungen in „geometrischer“ Form. Volk (Würzburg).

Hamburger, Hans Ludwig: Beweis einer Carathéodoryschen Vermutung. II. Acta math. 73, 175–228 (1941).

In Teil I (siehe dies. Zbl. 23, 69) war für jede reguläre Fläche in der Umgebung eines konvexen Punktes eine spezielle Darstellung gegeben worden. Setzt man von der in dieser Darstellung auftretenden Funktion W voraus, daß sie sich in eine Reihe

$$W(\varrho, \vartheta) = \frac{\varrho^2}{4} + \varrho^m \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu(\vartheta) \varrho^\mu$$

entwickeln läßt, so läßt sich, wie in Teil I gezeigt worden ist, der Satz über die Existenz zweier Nabelpunkte auf Flächen vom Geschlecht 0 unter der Bedingung beweisen, daß $w_0(\vartheta)$ nur Nullstellen erster und zweiter Ordnung besitzt. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien nahm bei der erwähnten Darstellung eine besonders einfache Gestalt an: $A(d\varrho^2 - \varrho^2 d\vartheta^2) + 2B\varrho d\varrho d\vartheta = 0$. Der Index i_s eines Nabels bestimmt sich aus der Gleichung

$$i_s = \sum_{\theta_\mu(\varrho)} \text{sign} \frac{\frac{\partial^s A(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta^s}}{2B(\varrho, \vartheta)} \Big|_{\vartheta = \theta_\mu(\varrho)} = \sum_{\nu=1}^N i(\vartheta_\nu),$$

wobei die Summe über alle Funktionen $\theta_\mu(\varrho)$ zu erstrecken ist, die Lösungsfunktionen vom ungeraden Vielfachheitsgrad s_μ der Gleichung $A(\varrho, \vartheta) = 0$ sind und der Bedingung $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \theta_\mu(\varrho) = \vartheta_\nu$ (ϑ_ν Nullstelle von $w_0(\vartheta)$) genügen. Es handelt sich jetzt darum, die Fälle zu diskutieren, in denen $w_0(\vartheta)$ eine Nullstelle ϑ_0^0 höherer als zweiter Ordnung besitzt. Verf. beweist, daß es zum Beweise der Carathéodoryschen Vermutung genügt,

zu zeigen, daß: $i(\vartheta^0) \geq -1$. Man kann sich der Einfachheit halber ϑ^0 an die Stelle $\vartheta = 0$ gerückt denken. Die Lösungen $\theta_\mu(\varrho)$ mit $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \theta_\mu(\varrho) = \vartheta$, werden vermittels der Substitution $\varrho = \sigma^q$, $\vartheta = \sigma^{p_\nu} \omega$ in Puiseuxsche Reihen entwickelt:

$$\theta_\nu(\varrho) = \sigma^{p_\nu} \Omega_\nu(\sigma) = \sigma^{p_\nu} \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{\nu,\mu} \sigma^\mu.$$

Die weiteren Entwicklungen schließen sich an den hieraus gewonnenen Begriff des Kurvenverbandes (K.V.) an. Unter einem K.V. der Ordnung 0 versteht Verf. alle $\theta_\nu(\varrho)$ mit gleichem p_ν . Für einen K.V. der Ordnung μ wird noch die Übereinstimmung der Koeffizienten $\alpha_{\nu,0} - \alpha_{\nu,\mu-1}$ gefordert. Die Ungleichung $i(\vartheta^0) \geq -1$ wird nun für Kurvenverbände der Ordnung 0 unter einer einschränkenden Bedingung bewiesen, nämlich:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{2B(\sigma^q, \sigma^{p_\nu} \Omega_\nu(\sigma))}{\sigma^{L_\nu}} \neq 0,$$

wobei B einen der Koeffizienten der Differentialgleichung der Krümmungslinien bedeutet, den man sich so entwickelt zu denken hat:

$$2B(\sigma^q, \sigma^{p_\nu} \omega) = \sigma^{L_\nu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} G_{\nu,\lambda}(\omega) \sigma^\lambda. \quad \text{Knothe (Berlin).}$$

Thomas, Heinz: Zur Frage des Gleichgewichts von Tschebyscheff-Netzen aus verknüpften und gespannten Fäden. Math. Z. 47, 66—77 (1940).

Aus den beiden Scharen eines Tschebyscheff-Netzes auf einer Fläche kann man durch Auswahl von endlich vielen Kurven beider Scharen ein Rhombennetz aus Netzkurven bilden, bei dem die Rhombenseiten alle gleich lang sind. Denkt man sich die Knotenpunkte dieses Rhombennetzes im Raum durch gespannte Fäden verbunden, und am Rande des Netzbereiches Ausgleichskräfte angebracht, so kann das Fadennetz auch an sich ohne Unterstützung durch die Fläche im Gleichgewicht sein. Verf. gibt die Gleichgewichtsbedingung für Fläche und Netz für nach Null strebende Maschenweite. Setzt man außerdem voraus, daß für die beiden durch einen Knotenpunkt gehenden Fäden die Spannungen gleich sind („isotrope Spannungsverteilung“), so zeigt sich, daß die Fläche negative Krümmung haben muß. Hauptergebnis ist der Satz: Unter den im Gleichgewicht befindlichen Tschebyscheff-Fadennetzen mit isotroper Spannungsverteilung gibt es solche mit den folgenden Eigenschaften: 1. die Netze sind Drehnetze, 2. die Trägerfläche besitzt konstante negative Krümmung, 3. das Netz besteht aus den Schmiegtangentenkurven der Trägerfläche. Jede dieser drei Eigenschaften bedingt die beiden anderen.

Bol (Freiburg).

Blank, J.: Zum Engelsen Problem betreffend Translationsflächen. 2. Commun. Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkoff, IV. s. 17, 99—107 u. deutsch. Zusammenfassung 107 (1940) [Russisch].

Fortsetzung der Abhandlung Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff et Soc. Math. Kharkov (4) 14, 181—204 (1937); dies. Zbl. 19, 184. Jetzt werden alle Flächen bestimmt, die Translationsflächen sind in bezug auf zwei Ebenen ω , ω' , und auf denen das durch ω und ω' bestimmte Ebenenbüschel eine Schar von erzeugenden Kurven ausschneidet. Es werden zwei Fälle unterschieden. Der erste führt auf vier verschiedene Flächen, der zweite auf fünf, von denen allerdings eine keine Translationsfläche im eigentlichen Sinne ist, sondern bloß geradlinig, also eine ausgeartete Translationsfläche. Auf S. 99, Z. 9 von unten, werden einige Zeilen mitgeteilt, die auf S. 188, Z. 7 von unten, der ersten Abhandlung im Drucke ausgefallen waren. Engel (Gießen).

Hazebroek, P.: Un problème de la théorie des réseaux plans. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 43, 1172—1179 (1940).

In der vorliegenden Arbeit werden mittels der Cartanschen Methode des repère mobile alle ebenen nichtgeradlinigen Netze bestimmt, die unendlich viele geradlinige konjugierte Netze zulassen. Das Resultat ist folgendes: Es gibt nur ein Netz von der erwähnten Eigenschaft, und dies besteht aus Kegelschnitten; alle Kegelschnitte des

Netzes gehen durch einen Punkt, wobei sie sich in zweiter Ordnung berühren, und sie haben außerdem eine gemeinsame Tangente. Das Netz ist eine Projektion der asymptotischen Kurven der Fläche $x = \frac{1}{2}(u+v)^2 \log(u+v) - (u-v)^2$, $y = (u+v)^2$, $z = u - v$.
O. Borůvka (Brünn).

Gambier, Bertrand: Surfaces admettant plusieurs réseaux conjugués coniques. J. Math. pures appl., IX. s. 19, 63—82 (1940).

In einer früheren Arbeit [Ann. École norm., III. s., 55, 83—118 (1938); dies. Zbl. 20, 224] hat der Verf. eine allgemeine Methode entwickelt, um die Flächen zu bestimmen, auf denen es zwei oder mehrere Paare von solchen konjugierten Kurvenscharen gibt, wo die Tangentialebenen der Fläche längs jeder Kurve der Schar einen Kegel einhüllen. Er setzt diese Methode von neuem auseinander. Sie ist theoretisch vollkommen, erfordert aber gewaltige Rechnungen, die i. a. nicht ausführbar sind. Ein besonderer Fall ist der, daß für jedes Paar von solchen konjugierten Kurvenscharen die Spitzen der umschriebenen Kegel zwei in einer bestimmten Ebene liegende Kurven bilden. Die Aufgabe kommt dann nach einer vom Ref. eingeführten Ausdrucksweise darauf hinaus, solche Flächen zu bestimmen, die Translationsflächen sind in bezug auf zwei oder mehr verschiedene Ebenen. In der früheren Arbeit hatte der Verf. die Aufgabe noch mehr spezialisiert, indem er die Ebenen der Kegelspitzen zusammenfallen ließ. Er war auf diese Weise zu einer neuen und elementaren Lösung des Lieschen Problems gelangt, alle Flächen zu bestimmen, die zwei oder mehrere Paare von zusammengehörigen Translationserzeugungen gestatten. — Jetzt betrachtet er den Fall, daß bei dem einen Paar von konjugierten Kurven die Kegelspitzen beliebige Kurven bilden (réseau conique), bei dem andern zwei Kurven in einer Ebene (réseau de translation). Es zeigt sich, daß man eine Anzahl Bedingungen von der Form: $\xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_4 \eta_4 = 0$ findet, wo jedes ξ_i ein Polynom mit numerischen Koeffizienten ist, gebildet aus einer Funktion X_i von x_i und aus deren Ableitungen, während η_i ebenso aus einer Funktion Y_i von y_i gebildet ist. Theoretisch kann man immer feststellen, ob diese Bedingungen Lösungen zulassen und wie viele, aber die erforderlichen Rechnungen sind meist unüberwindlich. Beispiele zeigen, daß die von den Kegelspitzen gebildeten Kurven nicht algebraisch zu sein brauchen. Hierdurch erklärt es sich, warum die jetzige Aufgabe so viel schwieriger ist als die von Lie behandelte, bei der das Abelsche Theorem zu Hilfe kommt. Man muß froh sein, einfache Beispiele angeben zu können, wo die Aufgabe wirklich Lösungen hat. So ist man z. B. von vornherein sicher, daß es Flächen gibt mit einem réseau conique und mit ∞^1 réseaux à translation. — In der früheren Arbeit hatte der Verf. auf die von dem russischen Mathematiker J. Blank entdeckten Beispiele hingewiesen. Nunmehr behandelt er einen vom Ref. untersuchten besonderen Fall [Rend. Circ. mat. Palermo 59, 165—184 (1935); dies. Zbl. 14, 331]. Die Fläche enthält da zwei réseaux de translation, von denen eines aus zwei Scharen paralleler, ebener Schnitte besteht, während die Ebene, auf die sich das zweite bezieht, der einen dieser beiden Scharen angehört. Auf seinem neuen Wege findet er die vom Ref. aufgestellten Flächen wieder, bringt sie zum Teil auf neue Formen und gibt neue Eigenschaften von ihnen an. Engel (Gießen).

Vasseur, Marcel: Déformation d'une surface avec un réseau conjugué permanent dans l'espace elliptique. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 823—825 (1939).

In einem auf ein System Weierstraßscher Koordinaten $x_0 x_1 x_2 x_3$ bezogenen dreidimensionalen elliptischen Raum wird eine auf ein doppelt konjugiertes Kurvensystem (u, v) bezogene Fläche untersucht. Ebenso wie die Punktkoordinaten x erfüllen auch die Tangentialkoordinaten ξ eine Laplacesche Gleichung, die mittels einer Transformation, welche ξ in eine Gruppe quadratischer Lösungen (Guichard) überführt, auf die Moutardsche Form zurückgeführt werden kann. Umgekehrt entspricht jeder Gruppe von vier quadratischen Lösungen einer Moutardschen Gleichung eine auf das konjugierte Netz (u, v) als Basis deformierbare Fläche S . P. Buzano (Torino).

Masotti Biggiogero, Giuseppina: Sopra un invariante di elementi curvilinei del piano. Ist. Lombardo, Rend., III. s. **73**, 465—474 (1940).

In einer früheren Arbeit (Atti Accad. naz. Lincei, Rend. **1926**) hat Ref. gezeigt, daß drei komplanare Kurvenelemente 2. Ordnung, E_2 , die sich in einem Punkte berühren, eine Invariante gegenüber Punkttransformationen besitzen. Verf. beweist, daß die gleiche Invariante auch für drei Elemente E_r r -ter Ordnung gilt, die einen E_{r-1} ($r \geq 2$) gemein haben. Diese Invariante wurde auch vom Ref. in einer Arbeit über Halphensche Büschel (Atti del II Congr. dell'Un. Mat. Ital. **1940**) angewandt. — Es folgen mehrere geometrische Anwendungen dieser Invarianten.

E. Bompiani (Roma).

Calapso, R.: Il rapporto anarmonico. Esercitazioni Mat. **13**, 48—71 (1941).

Verf. geht davon aus, daß die kanonische Normalisierung von Laguerre-Forsyth einer auf eine Kurve C des S_{n-1} bezüglichen Differentialgleichung n -ter Ordnung auf C den projektiven Parameter festlegt, mittels dessen man das Doppelverhältnis von vier Punkten von C definiert (Bompiani, dies. Zbl. **15**, 17, 403). Für $n = 3$ betrachtet Verf. im Anschluß an E. Cartan (Théorie des espaces à connexion projective, Cap. II) die projektiven Torsen erster und zweiter Art von C , die das Doppelverhältnis von vier Punkten von C geometrisch zu definieren gestatten. Bei beliebigem n betrachtet er im Anschluß an Bompiani (vgl. a. a. O.) die Flächen Φ_s (Abgeleitete der Ordnung s) ($1 \leq s \leq n - 1$), die Kurven Γ_s (lokale Ableitungen der Ordnung s), die Kurven C_s (kanonische Derivierte der Ordnung s ; für $n = 3$ sind C_2 und C_1 die projektiven Torsen). Das Doppelverhältnis von vier Punkten von C ist das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die durch die gegebenen Punkte gehenden C_1 die Tangenten an C schneiden. Weiterhin beweist Verf., daß auch für $s > 1$ die C_s auf Φ_s projektiv die Γ_s bestimmen, woraus weitere Definitionen des Doppelverhältnisses folgen. Schließlich erinnert Verf. an die von Pasquale Calapso gegebene Deutung des Problems der Definition des Doppelverhältnisses von vier Punkten auf einer ebenen Kurve und beschließt die Abhandlung durch Hinweise auf einige Erweiterungen in der konformen Gruppe.

Mario Villa (Bologna).

Hsiung, Chuan-Chih: Note on the intersection of two space curves. Tôhoku Math. J. **47**, 201—209 (1940).

Zwei Kurven eines projektiven Raumes S_3 , die durch einen Punkt mit verschiedenen Tangenten hindurchgehen, bestimmen zwei bezüglich aller Kollineationen kovariante Geraden und zwei ebensolche Punkte, oder drei kovariante Geraden und drei solche Punkte, je nachdem ihre Schmiegungebenen im Schnittpunkt verschieden sind oder zusammenfallen [E. Bompiani, Mem. Accad. Bologna (8) **3**, 35—38 (1926); Atti Accad. naz. Lincei, Rend., (6) **14**, 456—461 (1931); dies. Zbl. **3**, 412]. Verf. entwickelt einige neue Konstruktionen für diese kovarianten Geraden und Punkte [vgl. dazu auch B. Su, Tôhoku Math. J. **39**, 226—232 (1934); dies. Zbl. **9**, 271].

E. Bompiani (Roma).

MacQueen, M. L.: The axis quadrics at a point of a surface. Amer. J. Math. **63**, 112—118 (1941).

Si consideri una superficie riferita a un doppio sistema coniugato (u, v) : i piani osculatori alle curve del sistema uscenti da un punto x si segano nell'asse del punto x rispetto al sistema. Sia Q_u la quadrica osculatrice lungo la generatrice per x alla rigata degli assi passanti per i punti della linea u uscente da x . Analogamente si definisce Q_v . L'Autore trova le equazioni di Q_u e Q_v in un sistema locale di riferimento e dimostra alcune semplici proprietà fra cui la seguente: Q_u e Q_v si segano, oltre che nell'asse uscente da x , in una cubica sghemba che incontra l'asse nei suoi fuochi. *P. Buzano*.

Abramescu, Nicolas: Nouvelle méthode pour obtenir la cubique qui donne les tangentes de Darboux en un point d'une surface. C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 780—781 (1939).

Auf einer Raumkurve werden zu einem Punkte M zwei weitere Punkte M_1, M_2 , für die die Bögen $\widehat{M_2 M} = \widehat{M M_1}$ sind, sowie der auf der Tangente in M gelegene

Punkt T_a betrachtet, gegen den der Schnitt der Geraden $M_1 M_2$ mit der rektifizierenden Ebene in M strebt, wenn $\widehat{M_2 M} \rightarrow 0$ geht. Analog werden zu einem Punkte M einer ebenen Kurve zwei Punkte M_1, M_2 mit $\widehat{M_2 M} = \widehat{M M_1}$ und der Punkt T_a betrachtet, gegen den der Schnitt der Geraden $M_1 M_2$ mit der Tangente in M strebt, falls $\widehat{M_2 M} \rightarrow 0$ geht. — Es sei nun weiter eine Fläche $z = \frac{1}{2}F_2 + \frac{1}{6}F_3 + \dots$ gegeben, wobei F_2, F_3 homogene Formen zweiten bzw. dritten Grades in x, y bedeuten, also die z -Achse die Normale im Anfangspunkt O ist. Für jeden durch O gelegten Normalschnitt bestimmt Verf. nach obigem den entsprechenden Punkt T_a und findet, daß der Ort der Punkte T_a in der Berührungsebene von O die Kurve dritter Ordnung $F_2 + \frac{1}{3}F_3 = 0$ ist. In bekannter Weise sind dann die Verbindungslinien zwischen O und den Wendepunkten dieser Kurve die Darboux'schen Tangenten in O an die Fläche. *Mario Villa.*

Bell, Philip O.: Projective analogues of the congruence of normals. Amer. J. Math. 62, 680—686 (1940).

Es wird eine geometrische Interpretation der von Grove [Bull. Amer. Math. Soc. 36, 582—586 (1930)] analytisch definierten R -konjugierten Geradenkongruenzen (d. h. bei denen die abwickelbaren Flächen auf einer Fläche S ein konjugiertes Netz bilden) gegeben [$R = R(u, v)$ beliebig auf S]. Die Erzeugende einer R -Kongruenz ist diejenige Gerade durch den Flächenpunkt y , in der sich alle Schmiegungebenen der durch y gehenden Extremalen des Integrales $\int (Rv')^{\frac{1}{2}} du$ schneiden. Für $R = \text{const} \cdot a'b$ ist die R -konjugierte Gerade die projektive Normale Fubini's; eine weitere, derartig projektiv ausgezeichnete Kongruenz ergibt sich mit Hilfe eines mit S verbundenen Büschels von Quadriken (das Wilczynskis kanonische Quadrik enthält).

Dobbrack (Berlin).

Fubini, Guido: On a property of W -congruences. Ann. of Math., II. s. 41, 356—364 (1940).

Verf. gibt neue Beweise für zwei Sätze von Jonas [Math. Ann. 114, 237—274 (1937); dies. Zbl. 16, 181]. Es seien $x(u, v)$ und $y(u, v)$ zwei Flächen, die durch gleiche Parameterwerte einander punktweise zugeordnet sind. In jedem Punkt von (x) werden zwei Tangenten t_x, τ_x definiert, denen in (y) die Tangenten t_y, τ_y zugeordnet sind. Sollen sich t_x und τ_y sowie t_y und τ_x schneiden, etwa in den Punkten s_t und s_τ , so bilden die Tangentenpaare t_x, τ_x bzw. t_y, τ_y eine Involution. Verf. wählt die Parameterlinien auf (x) und (y) so, daß t_x in jedem Punkt die Kurve $v = \text{konst.}$ und τ_x die Kurve $u = \text{konst.}$ berührt, und fragt nach den Flächen (x) und (y) , für welche die Schmiegungeebene in x an die Kurve $v = \text{konst.}$ mit der Schmiegungeebene in y an $u = \text{konst.}$ zusammenfällt, d. h. für die x, x_u, x_{uu} Linearkombinationen von y, y_v, y_{vv} sind. Dann sind (x) und (y) Brennflächen der Kongruenzen (t_x) und (τ_y) , die als gemeinsame weitere Brennfläche die Fläche (s_t) besitzen; d. h. $(x), (y)$ sind Kongruenztransformierte von s_t . Fordert man die entsprechende Eigenschaft für τ_x und t_y , so sind $(x), (y)$ Kongruenztransformierte einer weiteren Fläche s_τ , und das Strahlensystem der Geraden (x, y) , die zugeordnete Punkte von (x) und (y) verbinden, ist eine W -Kongruenz. Die Punkte x und y sind konjugiert in bezug auf die Brennpunkte der Kongruenz (x, y) . Die Parameterlinien sind die Asymptotenlinien der Brennflächen dieser Kongruenz. Verf. gibt anschließend neue Beweise für die Umkehrung dieses Satzes und schließt mit der Problemstellung, zu einer gegebenen Fläche (x) die Parameterlinien u, v und die Fläche (y) so zu bestimmen, daß die obigen Bedingungen erfüllt sind.

W. Haack (Karlsruhe).

Fubini, Guido: On Bianchi's permutability theorem and the theory of W -congruences. Ann. of Math., II. s. 41, 620—638 (1940).

Zwei Flächen $(x), (z)$ (mit den Punkten x, z) nennt Verf. kongruenz-bezogen (congruence-transforms), wenn sie 1) eineindeutig aufeinander abgebildet sind, und 2) die Kongruenz der Verbindungsgeraden (xz) entsprechender Punkte x, z die beiden Flächen als Brennflächen hat. — Es sei jede der Flächen $(x), (y)$ kongruenz-bezogen auf jede

der Flächen (z) , (t) , (η) (entsprechenden Punkten mögen gleiche Parameterwerte u , v zukommen). Im Rahmen der projektiven Flächentheorie wird dann folgende Umkehrung des Bianchischen Vertauschbarkeitssatzes bewiesen: Entsprechen die auf (x) von den Tangenten (xz) , (xt) , $(x\eta)$ eingehüllten Kurven den auf (y) von (yz) , (yt) , $(y\eta)$ eingehüllten Kurven, so ist $\eta = z + \varrho t$, $y = x + \sigma w$, wo w ein fester Punkt ist (ϱ , σ beliebig konstant), und die Kongruenzen $(x\eta)$, $(y\eta)$ sind W -Kongruenzen. Umgekehrt, ist von den beiden Flächenscharen $\zeta = x + \sigma y$, $\eta = z + \varrho t$ (ϱ , σ beliebig konstant) jede Fläche (ζ) kongruenz-bezogen auf jede Fläche (η) , so ergibt sich wieder der Vertauschbarkeitssatz: ist eine der Kongruenzen $(\zeta\eta)$ eine W -Kongruenz, so sind es alle. — Die Frage, wann zwei Flächen, die auf eine dritte kongruenz-bezogen sind, auf wenigstens noch zwei andere Flächen kongruenz-bezogen sind, führt auf gewisse Integrabilitätsbedingungen (deren geometrische Deutung schwierig zu sein scheint), woraus ein neuer Beweis für den Vertauschbarkeitssatz entspringt. — In Verallgemeinerung der bei diesem Satz vorliegenden Verhältnisse führt Verf. den Begriff des Kongruenzbüschels ein (pencil of congruences) als der Gesamtheit von ∞^1 Strahlenkongruenzen (aufeinander bezogen durch gleiche Parameterwerte u , v), die 1) eine Brennfläche (x) gemeinsam haben, für die 2) entsprechende Punkte t der zweiten Brennfläche auf einer Geraden α liegen, und für die 3) entsprechende Tangentenebenen von (t) zu demselben Ebenenbüschel δ gehören. Mit Hilfe einer Riccatischen Differentialgleichung schließt man dann, daß die Punktreihe α und das Ebenenbüschel δ , die zu den ∞^2 Punkten x gehören, projektiv zueinander sind. Ist ferner eine Kongruenz des Kongruenzbüschels eine W -Kongruenz, so sind es auch alle anderen; umgekehrt bestimmen zwei W -Kongruenzen stets ein Kongruenzbüschel. Ist eine Kongruenz eines Kongruenzbüschels gegeben, so hängt die Bestimmung des Büschels ab von einem Gleichungssystem, das völlig analog ist den Gleichungen, auf denen die Theorie der W -Kongruenzen beruht. Schließlich werden diese Resultate noch auf einem anderen Wege abgeleitet.

Dobbrack (Berlin).

Sasaki, Shigeo, and Tsuneo Suguri: On the problems of equivalence of plane curves in the Lie's higher circle geometry and of minimal curves in the conformal geometry. Tôhoku Math. J. 47, 77—86 (1940).

Bei der Minimalprojektion der Punkte (des Raumes C_3 mit der Signatur $-++$) auf die Kreise einer Ebene entspricht der Hüllkurve von Kreisen eine Minimalkurve in C_3 . Das im Titel erwähnte Problem ist also mit dem konformen Äquivalenzproblem von zwei Minimalkurven in C_3 gleichbedeutend. Dieses Problem ist aber gelöst, wenn man die Frenetschen Formeln einer Minimalkurve in C_3 findet. Verf. bedienen sich zu ihrer Konstruktion der pentasphärischen Koordinaten und des Cartanschen Verfahrens. Die Frenetschen Formeln enthalten als einzige Krümmung $k(\sigma)$. Das Äquivalenzproblem ist dann mit den Gleichungen $k(\sigma) = k'(\sigma')$, $\sigma' = \sigma + \text{konst.}$ gleichbedeutend. — Spezielle Fälle werden untersucht. (Bemerkung des Ref.: Eine analoge Problemstellung existiert auch im Raume für die „Kanalfächen“. Bedient man sich der hexasphärischen Koordinaten, so bekommt man drei Krümmungen k_1, k_2, k_3 , die unabhängig vom Proportionalitätsfaktor sind und aus denen man (für einen beliebigen Parameter t) die Differentialinvarianten $k_1 dt^2, k_2 dt, k_3 dt$ bilden kann.) *Hlavatý.*

Dobbrack, Gerhard: Differentialgeometrie der Kugelkomplexe. 2. Minimalkomplexe. Math. Z. 47, 1—7 (1940).

In seiner Arbeit „Differentialgeometrie der Kugelkomplexe“ [Math. Z. 45, 669 bis 705 (1939); dies. Zbl. 22, 265] hat Verf. (unter seinem früheren Namen Paetz) zwei symmetrische Fundamentalformen G_{ik}, H_{ik} eingeführt. In der Titularbeit behandelt Verf. solche Kugelkomplexe, bei denen die erste Variation des Integrals $\iiint \sqrt{-i} |G_{ik}| du^1 du^2 du^3$, erstreckt über ein beliebiges Gebiet des Komplexes, verschwindet. Es sind dies Komplexe mit überall verschwindendem H . Für sie werden zwei geometrische Kennzeichnungen gegeben: 1. Mit Hilfe der Winkel, unter denen

eine Komplexkugel die Grundkugeln von Berührungskomplexen schneidet, die zu drei orthogonalen Richtungen gehören. 2. Apolarkomplex und Normalenkomplex fallen zusammen. Der Apolarkomplex läßt sich geometrisch so charakterisieren: „Gibt es Tripel zueinander orthogonaler Richtungen $\dot{u}_{(\alpha)}^i$, die zu demselben Berührungskomplex gehören, so muß dies der Apolarkomplex sein.“ Die Existenz derartiger Tripel wird bewiesen.

Knothe (Berlin).

Chern, Shiing-Shen: Sur les invariants intégraux en géométrie. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Kunming A 4, 85—95 (1940).

Mittels der Methoden von É. Cartan wird ein Kriterium gegeben dafür, daß eine Gesamtheit von Elementen unter einer Gruppe von Lie eine Integralinvariante besitzt. Davon werden einfache Anwendungen auf die affine Gruppe und auf die Gruppe von Möbius gemacht.

Blaschke (Hamburg).

Rham, G. de: Sur les invariants intégraux de l'espace hermitien. C. R. Soc. Math. France année 1938, 44 (1939).

Alexander, H. W.: The rôle of the mean curvature in the immersion theory of surfaces. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 230—253 (1940).

Part I: Let $\varrho_2 > \varrho_1$ be the principal radii of curvature of a surface with the metric tensor $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ and $2M = 1/\varrho_1 + 1/\varrho_2$, $2N = 1/\varrho_1 - 1/\varrho_2$, $K = 1/\varrho_1\varrho_2$. Then the second fundamental tensor may be defined by

$$(1) \quad \Omega_{\alpha\beta} = \cos\Phi(b_{\alpha\beta} - Ng_{\alpha\beta}) + \sin\Phi b_{\alpha\beta}^* + Mg_{\alpha\beta}$$

where $b_{\alpha\beta} = 2NA_{,\alpha}A_{,\beta}/\Delta_1 A$, A is any real non-constant scalar, Φ is twice the angle from the vector $A_{,\alpha}$ to the line of curvature whose principal radius is ϱ_1 , $2b_{\alpha\beta}^* = (\varepsilon_{\alpha}^{\delta} b_{\delta\beta} + \varepsilon_{\beta}^{\delta} b_{\delta\alpha})$, and $\varepsilon^{\alpha\beta}$ is the Ricci tensor ($\varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0$, $\sqrt{g}\varepsilon^{12} = -\sqrt{g}\varepsilon^{21} = 1$). The invariant Φ satisfies a partial differential equation (E) equivalent to the Codazzi equations of (1). The condition of integrability of (E) are

$$(2) \quad R \cos\Phi + S \sin\Phi + T = 0$$

where R, S, T are functions of M, N, K and their derivatives. Substituting Φ from (2) in (1), one gets

$$(3) \quad \Omega_{\alpha\beta} = Ua_{\alpha\beta} + \varepsilon V a_{\alpha\beta}^* + Wg_{\alpha\beta} \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

where U, V and W are functions of S and T and

$$A_{\alpha\beta} \equiv -M_{,\alpha\beta} + \frac{M_{,\alpha}N_{,\beta} + M_{,\beta}N_{,\alpha}}{N}.$$

The necessary and sufficient conditions for the mean curvature M are obtained when we substitute (3) in the Codazzi equations. — Some exceptional cases are treated in the last section. — Part II deals with an important type of singularity: A curve E for which the mean curvature is infinite and the total curvature is finite. The curve E is an analogue of the edge of regression of a developpable surface. If $1/\varrho$, $1/\varrho_g$, $1/\tau$ and K is the curvature, geodesic curvature and torsion of E and the total curvature of the surface along E , then

$$(4) \quad \varrho = \varepsilon \varrho_g \quad K + 1/\tau^2 \neq 0 \quad \varepsilon = \pm 1.$$

E is envelopped by both sets of asymptotic lines, which are analytic curves near E and by one set of lines of curvature and met orthogonally by the other set. — The last two sections are devoted to the index of a region whose only singularity is E .

Hlavatý (Prag).

Walker, A. G.: Certain groups of motions in 3-space of constant curvature. Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 81—94 (1940).

Die vollständige Bewegungsgruppe eines dreidimensionalen Raumes S_3 von konstanter Krümmung K (mit den Koordinaten x^i , $i = 1, 2, 3$, und der Metrik $ds^2 = dx^i dx^i / (1 + \frac{1}{4} K (x^k x^k)^2)$) ist eine G_6 ; es wird nach deren dreiparametrischen Untergruppen G_3 gefragt. Im Anschluß an H. P. Robertson [Ann. of Math., II. s. 33, 496

bis 520 (1932); dies. Zbl. 5, 119] werden die Vektoren ξ_α^i , $\alpha = 1, 2, 3$ dreier linear unabhängiger infinitesimaler Transformationen der G_3 aufgestellt, wodurch eine Übertragung $A_{jk}^i = -\xi_k^\alpha \xi_{\alpha,j}^i$ (mit $\xi_k^\alpha \xi_\beta^\alpha = \delta_{\beta k}^\alpha$) und ein System von Bahnkurven definiert ist, deren Gleichungen $d^2 x^i + A_{jk}^i dx^j dx^k = 0$ zwei erste Integrale $dx^i = p^\alpha \xi_\alpha^i \cdot dt$, $dx^i = q^\alpha \xi_\alpha^i dt$ zulassen (p^α, q^α willkürlich konst.). Daraus folgt der Fernparallelismus des S_3 : eine in irgendeinem Punkte O festgelegte Vektorbasis ζ_α^i bestimmt in jedem Punkte P eine solche. — Für $K > 0$ sind die ζ_α^i die Vektoren einer zweiten G_3 : das sind die zwei schon von Robertson aufgestellten invarianten und zueinander reziproken Untergruppen. Die Bahnkurven sind geodätisch, und die Basis in P geht aus der in O durch Drehung der letzteren um die Achse OP und darauffolgende Levi-Civitätsche Parallelverschiebung nach P hervor. — Für $K < 0$ wird jede G_3 durch einen Einheitsvektor a^α und einen Skalar τ (beide willkürlich konst.) festgelegt, keine ist invariant. Aufstellung von ζ_α^i und Deutung der Bahnkurven geschieht an Hand der Darstellung des S_3 durch den euklidischen Raum E_3 mit den Koordinaten x^i und der Metrik $ds^2 = dx^i dx^i$. Die Bahnkurven (eine einzige G_3 ausgenommen) sind nie geodätisch: für $\tau = 0$ sind es im E_3 Kreise und für $\tau \neq 0$ Schraubenlinien. Für $\tau = 0$ entsteht die Basis in P durch Drehung der Basis in O um die Achse $a^i \times d^k$ ($d^k =$ Richtung der geodätischen Linie OP) und darauffolgende Parallelverschiebung nach P .

Dobbrack (Berlin).

Wong, Yung-Chow: On the Frenet formulae for a V_m in a V_n . Quart. J. Math., Oxford Ser. 11, 146—160 (1940).

Let $j^{\lambda_1} \dots j^{\lambda_m}(s)$ be a unit m -vector given along a curve $C(s)$ in a V_n and $j^{\lambda_1} \dots j^{\lambda_m}(C, s_0/s)$ the m -vector obtained by transporting $j^{\lambda_1} \dots j^{\lambda_m}(s)$ parallelly from the point s to s_0 along C . Putting

$$(1) \quad \cos \theta = m! j^{\lambda_1} \dots j^{\lambda_m}(s) j_{\lambda_1} \dots j_{\lambda_m}(C, s_0/s)$$

the author gets by Hlavatý method [Hlavatý, Mém. Sci. math. Fasc. 63 (1934), this Zbl. 9, 37] the formula

$$(2) \quad \left(\frac{d\Theta}{ds} \right)^2 \equiv \left(\frac{\theta(s + ds, s)}{ds} \right)^2 = m! (\delta_s j^{\lambda_1} \dots j^{\lambda_m}) (\delta_s j_{\lambda_1} \dots j_{\lambda_m})$$

which enables him to find the geometrical interpretation of the affinors H (belonging to the normal spaces of a V_m in a V_n) by means of the Frenet formulae for V_m in V_n (Schouten-Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie II 1938; this Zbl. 19, 183)

$$(3) \quad \left(\frac{d\Theta_{\nu\lambda}}{ds} \right)^2 = \left(\overset{y}{H}_{a\lambda} \cdot \overset{y}{H}_b^{\lambda} + \overset{y+z+1}{H}_{a\lambda} \cdot \overset{y+z+1}{H}_b^{\lambda} \right) i^a i^b$$

where i^a is the unit tangent vector of C in V_m ($a, b = \dot{1}, \dots, \dot{m}$; $\lambda, \nu = 1, \dots, n$). — In the last § some consequences of (3) are derived. (Although the investigations are established for the general case of a V_m in V_n we mentioned here only the results concerning the positive definite metric tensor.)

Hlavatý (Prag).

Koezian, Ervino: Sopra i ds^2 di classe uno. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 98, 27—42 (1939).

Die Bedingungen dafür, daß eine Riemannsche Mannigfaltigkeit V_n mit vorgegebenem ds^2 von der Klasse Eins sei, d. h. in einem Euklidischen Raum von $n+1$ Dimensionen verwirklicht werden kann, wurden von Ricci [Ann. di Mat. (2) 12, 135 bis 167 (1884)] angegeben; sie drücken sich in der Existenz eines zweistufigen kovarianten symmetrischen Tensors aus, der gewissen Bedingungen unterliegt und mit dem Riemannschen Tensor zusammenhängt. Es handelt sich also nicht um explizite Bedingungen. Unter Verwendung von Untersuchungen von E. Laura [Rend. Semin. mat. Univ. Padova 1, 85—109 (1930)], in denen ds^2 mittels n unabhängiger, von einem Punkte der V_n ausgehender Vektoren ausgedrückt wird, entwickelt Verf. die explizite Form der Riccischen Bedingungen und untersucht weiter getrennt die Fälle $n=3$

und $n \geq 4$. — Die gleiche Aufgabe wurde übrigens nach einer anderen Methode von T. Y. Thomas [Acta math. **67**, 169—211 (1936); dies. Zbl. **15**, 273] behandelt.

E. Bompiani (Roma).

Kawaguchi, Akitsugu, und Shisanji Hokari: Die Grundlegung der Geometrie der fünf-dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des zwei-dimensionalen Flächeninhalts. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 313—319 (1940).

Kawaguchi, Akitsugu, und Shisanji Hokari: Die Grundlegung der Geometrie der n -dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des K -dimensionalen Flächeninhalts. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 320—325 (1940).

In einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit wird eine sog. Grundfunktion $L(x^j; p_\alpha^j)$, ($j=1, \dots, n$; $\alpha=1, \dots, K$) gegeben, die gegenüber den Koordinatentransformationen $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ eine absolute Invariante und gegenüber den Transformationen $\bar{p}_\alpha^j = p_\beta^j \frac{\partial u^\beta}{\partial u^\alpha}$

eine Skalardichte vom Gewichte 1 ist. Eine solche Grundfunktion gibt Anlaß, in unserem Raum den Inhalt eines K -dimensionalen Bereiches (den wir uns etwa durch die Parameterdarstellung $x^j = x^j(u^\alpha)$ gegeben denken) mit Hilfe des Integrals

$$\int L\left(x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}\right) du^1 \dots du^K$$

zu definieren. Der Fall $K=1$ entspricht also der Finslerschen Geometrie, während der Fall $K=n-1$ auf die von Cartan entwickelte Theorie [É. Cartan, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire; Actualités scient. et industr. Nr. **72** (1933); dies. Zbl. **8**, 272] führt. Die Verff. entwickeln in dieser Weise eine Verallgemeinerung der Finslerschen bzw. Cartanschen Geometrie unter der zusätzlichen einschränkenden Bedingung, daß n und K zueinander prim sind. Diese Annahme geht aus der Tatsache hervor, daß bei der eingeschlagenen Methode die diophantische Gleichung $nx = Ky + 1$ Lösungen in (x, y) besitzen soll. Die erste Arbeit betrachtet den Sonderfall $n=5$, $K=2$, während die zweite sich mit dem allgemeinen Falle befaßt. — In sinnreicher Weise wird aus der Grundfunktion L ein Fundamentaltensor g_{ij} gewonnen, dessen Bestimmungszahlen natürlich Funktionen nicht nur der x^j , sondern auch der Bestimmungszahlen p^1, \dots, p_K des orientierten K -dimensionalen Flächenelementes sind. — Die Parallelübertragung in diesen $X_n^{(K)}$ -Räumen wird nach dem Muster von Cartan erklärt. Zunächst wird die sog. Grundübertragung abgeleitet und nachher die Parallelübertragung. Die explizite Gestalt (die sehr kompliziert ist) der Parameter der Übertragung wird hier nicht angegeben, aber es wird auf eine demnächst erscheinende Arbeit hingewiesen.

Golqb (Krakau).

Yano, Kentaro: Concircular geometry. 2. Integrability conditions of $\varrho_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu}$. Proc. Imp. Acad. Jap. **16**, 354—360 (1940).

The author considers the equation (1) $\varrho_{\mu,\nu} - \varrho_\mu \varrho_\nu + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \varrho_\alpha \varrho_\beta g_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu}$ which characterizes the concircular geometry (see this Zbl. **24**, 81). First of all it is obvious that the ϱ -curves (i. e. the curves whose tangential vector ist $\varrho^\nu = \varrho_\lambda g^{\lambda\nu}$) are geodesics. The conditions of integrability of (1) show that the ϱ -curves are Ricci-curves. Moreover the hypersurfaces $\varrho = \text{const}$ are totally umbilical. The necessary and sufficient condition that a Riemannian space admit a solution of the partial differential equation (1) is that the Riemannian space contains a family of totally umbilical hypersurfaces whose orthogonal trajectories are geodesic Ricci-curves.

Hlavatý (Prag).

Sasaki, Shigeo: On a remarkable property of umbilical hypersurfaces in the geometry of the normal conformal connexion. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **29**, 412—422 (1940).

Consider a subspace \mathfrak{E}_{n-1} in a conformal space \mathfrak{E}_n endowed with a normal conformal connection (see this Zbl. **24**, 82). The hypersurface \mathfrak{E}_{n-1} itself may be regarded as a space endowed with a normal conformal connection ("intrinsic" conformal connection). Denoting by $\mathfrak{B}^A_p, \mathfrak{B}^A_\infty$ the complete conformal derivative of the conformal

vector \mathfrak{B}^A prop. to δ_0^A and putting $\mathfrak{B}_p^A = \mathfrak{B}_p^A$, $\mathfrak{B}_\infty^A = \mathfrak{B}_\infty^A + \lambda \mathfrak{B}^A$, one can define (by method of projection) a conformal "induced" connection of \mathfrak{C}_{n-1} (for which $\lambda = 0$ identically). The author shows that a necessary and sufficient condition for $\lambda = 0$ in the intrinsic connection is that \mathfrak{C}_{n-1} be totally umbilical. For any such hypersurface in the space with the flat conformal connection, the induced conformal connection coincides with the intrinsic conformal connection.

Hlavatý (Prag).

Hokari, Shisanji: Die intrinsike Theorie der Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen. Proc. Imp. Acad. Jap. 16, 326—332 (1940).

Betrachtung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^m x^i}{\partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_m}} + H_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^i \left(u^\beta, x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}, \dots, \frac{\partial^{m-1} x^j}{\partial u^{\beta_1} \dots \partial u^{\beta_{m-1}}} \right) = 0.$$

Es handelt sich darum, eine intrinsike Theorie unter den Koordinatentransformationen $x^i = x^i(x^1, \dots, x^n)$; $u^\alpha = u^\alpha(u^1, \dots, u^K)$ aufzustellen. Dazu wird eine kovariante Ableitung für gemischte Vektoren, deren Bestimmungszahlen $v^{i\alpha}$ Funktionen von x^j, u^β und den Ableitungen von x^j bis zur $(m-1)$ -ten Ordnung sind, gebildet:

$$V_\beta v^{i\alpha} = D_\beta v^{i\alpha} + \Gamma_{\beta j}^i v^{j\alpha} + G_{\gamma \beta}^\alpha v^{i\gamma}.$$

Die $\Gamma_{\beta j}^i$ und $G_{\gamma \beta}^\alpha$ werden festgelegt unter der Voraussetzung, daß ein symmetrischer Affinor $h_{\alpha\beta}$ vom Range K gegeben ist. Für $m=4$ und $m=5$ wird $h_{\alpha\beta}$ aus $H_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^i$ bestimmt.

J. Haantjes (Amsterdam).

Hombu, Hitoshi: On the geometry of paths of higher order. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ. A 1, 129—142 (1941).

The differential forms

$$\omega^A \equiv \begin{cases} \omega^i \equiv dx^i - x^{(1)i} dt & \text{for } A = i \\ \omega^{(1)i} \equiv dx^{(1)i} - x^{(2)i} dt & A = (1)i \end{cases} \quad \left(x^{(r)i} \equiv \frac{d^r x^i}{dt^r} \right) \quad (1)$$

behave by transformations (2) $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n; t)$, $\bar{t} = t$ like contravariant extended vectors. The covariant differential of such a vector v^A is defined by

$$Dv^A = dv^A + (\gamma_B^A dt + \gamma_{B,C}^A v^C) dt \quad (3)$$

where γ_B^A and $\gamma_{B,C}^A$ are the parameters of the connection. If (4) $x^{(2)A} + \beta^A = 0$ (where $\beta^A \equiv -x^{(2)i}$ for $A = i$ and $= -a^i$ for $A = (1)i$, a^i being a given function $a^i = a^i(x, x^{(1)}, x^{(2)}, t)$) are the paths of this connection, then

$$\tilde{\omega}^A = dx^{(1)A} + \beta^A dt + \gamma_B^A v^B \quad (5)$$

is a vector. If one requires that $D_1 \tilde{\omega}^A(\frac{d}{dt}) - D_2 \tilde{\omega}^A(\frac{d}{dt})$ be a linear combination of $[\omega^i(\frac{d}{dt}), \frac{d}{dt}]$ and $[\omega^i(\frac{d}{dt}), \omega^i(\frac{d}{dt})]$ only, one gets (6) $\gamma_j^A, \gamma_{[j}^A, \gamma_{(j,k)}^A, \gamma_{(j,(1)k)}^A$ expressed by means of a^i and $\gamma_{j,(1)k}^A, \gamma_{j,k}^A$ expressed in terms of (6). The parameters of connection found, one may define the covariant derivatives by

$$Dv^A = \tilde{\omega}^B \nabla_B^A v^A + \omega^B \nabla_B^0 v^A + dt \nabla v^A.$$

In the second section the analogous method is applied to the theory of paths of higher order.

Hlavatý (Prag).

Suguri, Tsuneo: The geometry of K-spreads of higher order. Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Imp. Univ. A 1, 143—166 (1941).

Es wird das System von partiellen Differentialgleichungen m -ter Ordnung

$$(1) \quad p_{a(m)}^i + H_{a(m)}^i(x^j, u^b; p_{b(1)}^j, \dots, p_{b(m-1)}^j) = 0,$$

wo

$$p_{a(m)}^i = \frac{\partial^m x^i}{\partial u^{\alpha_1} \dots \partial u^{\alpha_m}}, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ a, b = 1, 2, \dots, K,$$

unter der Gruppe der „rheonomen“ Koordinatentransformationen

$$x^\lambda = x^\lambda(x^i, u^a); \quad \bar{u}^a = u^a; \quad \lambda = 1, \dots, n$$

betrachtet. Dies ergibt eine Verallgemeinerung der Cartanschen Theorie der „paths“-Geometrie unter der rheonomen Gruppe $x^\lambda = x^\lambda(x^i, t)$; $\bar{t} = t$ für die „K-spreads“.

Geometrie von J. Douglas. Es tritt natürlich eine verallgemeinerte Art von Extensoren auf. Das zweite Kapitel geht prinzipiell von dem Standpunkte aus, daß (1) zu nicht holonomen K -spreads führt. Hier ergeben sich die Begriffe der kovarianten Differentiation, der Krümmung und der Torsion. Im dritten Kapitel tritt eine eigentümliche neue Art von geometrischen Objekten auf, die der Verf. Pseudo-Extensoren nennt. *Schouten (Delft).*

Devisme, Jacques: Sur un espace dont l'élément linéaire est défini par $ds^3 = dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3dx dy dz$. J. Math. pures appl., IX. s. 19, 359—393 (1940).

Ausführung der in zwei C.R.-Noten niedergelegten Ergebnisse (vgl. dies. Zbl. 21, 29, 65). Das Linienelement des betrachteten R_3 ist in der Überschrift definiert, das Flächenelement wird durch

$$d\sigma^3 = (dy dz - dz dy)^3 + (dz dx - dx dz)^3 + (dx dy - dy dx)^3 - 3(dy dz - dz dy)(dz dx - dx dz)(dx dy - dy dx)$$

erklärt. Zur Richtungsfestlegung dienen die Appellschen Funktionen

$$\left. \begin{matrix} P(\theta, \varphi) \\ Q(\theta, \varphi) \\ R(\theta, \varphi) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{3} [e^{\theta+\varphi} + e^{j\theta+j^2\varphi} \left\{ \frac{1}{j^2} + e^{j^2\theta+j\varphi} \left\{ \frac{1}{j} \right\} \right\}], \quad j^3 = 1.$$

Das erste Kapitel ist den Beziehungen am Tetraeder in der neuen Metrik gewidmet; insbesondere die mittels eines Appellschen Trieders mit den Ecken $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ gebildeten Tetraeder besitzen Eigenschaften, die denen des rechtwinkligen Dreiecks analog sind. Die zugehörige Umkugel Σ ist durch die Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - \{a(x^2 - yz) + b(y^2 - zx) + c(z^2 - xy)\} = 0$$

erklärt, man erhält sie z. B. als Ort der Schnittpunkte der Geraden durch O mit den zu ihnen „senkrechten“ Ebenen durch (a, b, c) . — Das zweite Kapitel behandelt die Bewegungen eines Appellschen Trieders, die Existenz eines momentanen Ruhezentrums, das aber i. a. nicht mehr instantanes Drehzentrum ist, Beschreibung von Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten. Schließlich sind im Schlußkapitel eine Reihe von Formeln über die verallgemeinerten Tangensfunktionen Q/P , R/P und von Eigenschaften der verallgemeinerten Kugeln Σ und ähnlicher Übertragungen zusammengestellt.

Harald Geppert (Berlin).

Marchetti, Luigi: Sulla costanza dei tensori ϵ . Acta Pontif. Acad. Sci. 4, 15—20 (1940).

\sqrt{a} sei die Wurzel der Diskriminante des Maßtensors $a_{\lambda\mu}$ und $v^1 \dots v^n$ ein Feld von parallelen n -Vektoren längs einer Kurve. Dann gilt selbstverständlich

$$d\sqrt{a} v^1 \dots v^n = v^1 \dots v^n d\sqrt{a} + \sqrt{a} dv^1 \dots v^n = (v^1 \dots v^n \{v^{\nu}_\mu\}) \sqrt{a} - \sqrt{a} \{v^{\nu}_\mu\} v^1 \dots v^n dx^\mu = 0.$$

Der Verf. beweist diese Formel.

Hlavatý (Prag).

Masuyama, Motosaburô: On the subdependency. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 855—858 (1940).

Die Arbeit schließt an die in dies. Zbl. 23, 379 besprochene an. $\{u_i(t)\}$ ($i=1 \dots m$) sei wieder ein orthogonaler Vektorsatz, $\{g\}$ ein weiterer n -dimensional verteilter Vektorsatz; besteht dann mit gewissen Tensoren T^i eine lineare Beziehung der Form $T^0 g + \sum_{i=1}^m T^i u_i = 0$, so braucht der multiple Korrelationstensor $M(g; u_1 \dots u_m)$ nicht gleich E zu sein, vielmehr kann auch der Fall eintreten, daß $E - M \neq 0$, $T^0 \neq 0$, aber $\det(E - M) = 0$, $\det(T^0) = 0$ ($\det = \text{Determinante}$) ist. In diesem Fall heißen g, u_1, \dots, u_m subdependent; diese Möglichkeit bei Vektorgesamtheiten ist neu gegenüber dem skalaren Fall.

Harald Geppert (Berlin).

Masuyama, Motosaburô: The variance tensor of vector set and a nature of the symmetric correlation coefficient. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 22, 858—861 (1940).

Vgl. dies. Zbl. 23, 60, 77, 379. $\{u(t)\}$ ($t=1 \dots N$) bezeichne einen Vektorsatz, $\{u(t)\}$

seine Abweichungen vom mittleren Vektor, dann soll der Tensor $\overline{u u} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t) \cdot u(t)$

der Streuungstensor des Satzes heißen. $\{u_1(t)\} \dots \{u_p(t)\}$, $\{v_1(t)\} \dots \{v_q(t)\}$, $\{w_1(t)\} \dots \{w_s(t)\}$ mögen einen orthogonalen Vektorsatz bilden, es sei ferner

$$g(t) = \sum_{i=1}^p u_i(t) + \sum_{j=1}^q v_j(t), \quad h(t) = \sum_{i=1}^p u_i(t) + \sum_{k=1}^s w_k(t),$$

dann wird, falls die Streuungstensoren der $\{u_i\}$, $\{v_j\}$, $\{w_k\}$ übereinstimmen, der Korrelationstensor von g, h gleich

$$R(g, h) = \frac{p^2}{(p+q)(p+s)} E.$$

Ist $q = s$, so ist

$$\det R(g, h) = \left(\frac{p}{p+q} \right)^{2n}$$

das Quadrat des sog. symmetrischen Korrelationskoeffizienten. *Harald Geppert.*

Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haupt, Otto: Über ebene Bogen mit vorgeschriebenen Ordnungssingularitäten. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 50, Abt. 1, 256—269 (1940).

Für jede ungerade Zahl $2m+1 \geq 5$ läßt sich ein ebener Bogen \mathfrak{B} der linearen Ordnung $2m+1$ konstruieren, so daß \mathfrak{B} 1° überall eine scharfe Tangente besitzt; 2° das lineare Maß der Menge aller Punkte, in welchen \mathfrak{B} von der Ordnung $2m+1$ ist, beliebig wenig von der Länge des ganzen Bogens \mathfrak{B} abweicht. *G. Alexits.*

Hirano, Kôtarô: Simple proofs of Vogt's theorem. Tôhoku Math. J. 47, 126—128 (1940).

Der Vogtsche Satz besagt: AB sei ein gerichteter Kurvenbogen mit positiver, von A nach B hin monoton abnehmender Krümmung, der mit der Sehne \overline{BA} zusammen einen Eibereich einschließt; dann ist der Winkel zwischen \overline{AB} und der Tangente in A größer als der zwischen \overline{AB} und der Tangente in B . Für diesen Satz gibt Verf. zwei einfache analytische Beweise, von denen der zweite auf der Tatsache beruht, daß alle Krümmungskreise von \widehat{AB} denjenigen in A umschließen. *Harald Geppert.*

Kubota, Tadahiko: Nachtrag zu meiner vorigen Arbeit „Ein Satz über Eiliniën“. Tôhoku Math. J. 47, 177—180 (1940).

Verf. hat (vgl. dies. Zbl. 23, 171) den Satz bewiesen: r, R seien der kleinste und größte Krümmungsradius einer Eilinie E mit durchweg stetiger Krümmung; dann liegt der Halbmesser jedes Kreises, der E in mindestens drei verschiedenen oder zusammenfallenden Punkten schneidet, zwischen r und R . Daraus folgert Verf. sofort den bekannten Satz, daß der größte bzw. kleinste Krümmungskreis von E E einschließen bzw. ganz in E liegen muß. Beide Sätze lassen sich in die Relativgeometrie übersetzen, falls die an die Stelle des Kreises tretende Eichkurve durchweg stetig gekrümmt ist. *Harald Geppert (Berlin).*

Jackson, S. B.: The four-vertex theorem for spherical curves. Amer. J. Math. 62, 795—812 (1940).

Die Übertragung des Vierscheitelsatzes auf den Raum stößt auf die Schwierigkeit, daß eine Raumkurve durch ihre Krümmung allein nicht bestimmt ist. Da hingegen eine sphärische Kurve durch ihre geodätische Krümmung k_g als Funktion der Bogenlänge s festgelegt ist, liegt es nahe, die Extremstellen von k_g (geodätische Scheitel) zu untersuchen. Die Kugel geht durch geeignete Inversion in die Ebene über, daher untersucht Verf. zunächst den Einfluß einer Inversion auf k_g bei Kurven einer beliebigen Fläche F und stellt fest, daß die außerhalb des Inversionszentrums fallenden geodätischen Scheitel der Krümmungslinien von F in gleichartige Scheitel der Krümmungslinien der Bildfläche übergehen; insbesondere gilt dieser Erhaltungssatz für alle sphärischen Kurven, daher besitzt eine sich nicht überschneidende geschlossene sphärische Kurve der Klasse C''' mindestens vier geodätische Scheitel; in diesen wechselt zugleich

die Windung ihr Zeichen und umgekehrt. Die gewöhnlichen Scheitel (d. h. Extremstellen der Krümmung k) einer solchen Kurve sind entweder geodätische Scheitel oder geodätische Wendepunkte ($k_g = 0$); daher ist auch die Mindestzahl der gewöhnlichen Scheitel vier und, wenn es sich nicht um eine Eilinie ($k_g > 0$) handelt, sogar sechs. — Um auf allgemeinere sphärische Kurven überzugehen, wird im Anschluß an Graustein definiert: Ein gerichteter sphärischer Bogen AB der Klasse C''' gehört zum Typ Ω , wenn 1) auf ihm $k_g \geq 0$ und $\neq 0$ ist, 2) die ihn in A bzw. B berührenden größten Kugeln zusammenfallen und 3) den Bogen nur in A und B treffen, 4) der Bogen sich nicht überschneidet, außer daß höchstens A und B zusammenfallen; ein solcher Bogen hat entweder im Innern ein Minimum von k_g , oder k_g ist längs seiner konstant. Daraus folgt, daß eine geschlossene sphärische Kurve der Klasse C''' , die einen Bogen vom Typ Ω enthält und geodätische Wendepunkte besitzt, mindestens vier geodätische Scheitel aufweist. Ein geodätischer Scheitel heißt von erster Art, wenn in ihm k_g ober- oder unterhalb des Kurvenmittelwertes liegt, je nachdem in ihm ein Maximum oder Minimum von k_g vorliegt, die andern Scheitel heißen von zweiter Art; sind deren Anzahlen p_1 bzw. p_2 und die betrachtete Kurve C die Tangentenindikatrix einer geschlossenen sphärischen Kurve C_0 der Klasse C''' , so ist $p_1 - p_2$ gleich der Zahl geodätischer Scheitel von C_0 .

Harald Geppert (Berlin).

Gerieke, H.: Stützbarer Bereiche in komplexer Fourier-Darstellung. Deutsche Math. 5, 279—299 (1940).

Die Arbeit schließt an zwei frühere Untersuchungen von Görtler (dies. Zbl. 17, 189; 18, 379) an. Die Fourierreihe für die Stützfunktion $A(\varphi)$ eines ebenen stützbaaren Bereiches werde dargestellt durch

$$(1) \quad A(\varphi) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \alpha_{\nu} e^{i\nu\varphi} = \{\alpha_{\nu}\}, \quad \bar{\alpha}_{\nu} = \alpha_{-\nu}.$$

Erklärt man im Bereich dieser, nicht notwendig als konvergent vorausgesetzten Reihen die Summe durch $\{\alpha_{\nu}\} + \{\beta_{\nu}\} = \{\alpha_{\nu} + \beta_{\nu}\}$, das Produkt durch die Faltung der Stützfunktionen $\{\alpha_{\nu}\} \cdot \{\beta_{\nu}\} = \{2\pi\alpha_{\nu}\beta_{\nu}\}$, so entsteht ein Ring \mathfrak{r} , der sich als direkte Summe

$\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{v}_k$ einfacher Hauptideale \mathfrak{v}_k darstellen läßt, wobei \mathfrak{v}_k gerade die Reihen umfaßt, bei

denen nur α_n und $\bar{\alpha}_n \neq 0$ sind. Den \mathfrak{v}_k entsprechen als Bereiche die Hypozykloidenbereiche der Görtlerschen Basis. — Mittels der komplexen Darstellung (1) lassen sich eine Reihe bekannter Sätze und Begriffe über stützbaare Bereiche rasch ableiten und verschärfen. Als assoziierte Reihe $A^{(\omega)}(\varphi)$ zu $A(\varphi)$ bezeichnet Verf. die Fourierreihe mit den Koeffizienten: $\alpha_{\nu}^{(\omega)} = e^{i\omega\nu} \alpha_{\nu}$ ($\nu \geq 0$), $\alpha_{\nu}^{(\omega)} = e^{-i\omega\nu} \alpha_{\nu}$ ($\nu \leq 0$), wobei $\alpha_{+0} = \alpha_{-0} = \frac{1}{2} \alpha_0$ einzusetzen ist. Assoziierte Kurven haben in entsprechenden Punkten parallele Tangenten; ihre Evoluten und deren Fußpunktkurven stimmen im Flächeninhalt überein. Die Hypozykloidenbereiche erscheinen in neuem Lichte: es sind genau diejenigen, deren sämtliche Assoziierte durch Drehung aus dem Ausgangsbereich hervorgehen. Schließlich läßt sich jedem stützbaaren Bereich eine reelle Minimalfläche als Schiebfläche zweier Minimalkurven $\mathfrak{r}(t)$ und $\bar{\mathfrak{r}}(\bar{t})$ zuordnen, wobei in der Weierstraß-Enneper-

schen Darstellung von \mathfrak{r} die erzeugende Funktion $f(t) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \alpha_{\nu} t^{\nu}$ einzusetzen ist; assoziierten Bereichen entsprechen dann assoziierte Minimalflächen. Dieser Zusammenhang wird weiter verfolgt.

Harald Geppert (Berlin).

Fiala, Félix: Une inégalité isopérimétrique sur les surfaces ouvertes à courbure positive. C. R. Acad. Sci., Paris 209, 821—823 (1939).

Für jede einfache geschlossene rektifizierbare Kurve in einem zweidimensionalen, im Cartanschen Sinne normalen, offenen Riemannschen Raum vom Zusammenhang der Ebene, der nirgendwo negativ gekrümmt ist, gilt die Ungleichung $L^2 \geq 2F \int_{\mathfrak{e}_0}^{\mathfrak{e}_1} \frac{ds}{\rho}$, wo L den Umfang, F die umschlossene Oberfläche, $\frac{1}{\rho}$ die geodätische Krümmung der

Kurve darstellt. Das Gleichheitszeichen steht nur für die Kreise im Euklidischen Fall. Nach Gauß-Bonnet ergibt sich daraus $L^2 \geq 2F(2\pi - C)$, wenn $C = \int K d\sigma$ die totale Krümmung des Raumes darstellt. Nach Cohn-Vossen [Compositio Math. 2, 69—133 (1935); Rec. math. Moscou 1 (43), 139—163 (1936); dies. Zbl. 11, 225; 14, 276] ist $C \leq 2\pi$. Der Beweis soll wesentlich „Entfernungskreise“ heranziehen. Einige Anwendungen: Bei vorgegebenem L ist F nach oben stets beschränkt, wenn $C < 2\pi$, im Falle $C = 2\pi$ nur dann, wenn L kleiner ist als eine vom Raum abhängige Schranke L^* .

$\liminf \frac{L^2}{F} = 2\pi - C$, die Grenze wird nur im Euklidischen Fall erreicht. Die Räume haben sämtlich unendliche Oberfläche. Vom Ref. erscheint demnächst in den Jber. Deutsch. Math.-Verein. unter etwas abweichenden Voraussetzungen der Beweis einer Ungleichung, die für beliebig gekrümmte Räume gilt und die obige als Sonderfall enthält.

Bol (Freiburg i. Br.).

Caccioppoli, Renato: Ovaloidi di metrica assegnata. Comment. Pontif. Acad. Sci. 4, 1—20 (1940).

In vorliegender Abhandlung gibt Verf. eine strenge und allgemeine Lösung des Existenzproblems einer geschlossenen konvexen Fläche zu vorgegebener Metrik. Das Problem wird aufgefaßt als die Bestimmung der Umkehrung einer Transformation zwischen zwei Funktionalräumen, einmal dem Raum der konkreten Ovale, d. h. der geschlossenen konvexen Flächen des gewöhnlichen Raumes, zum zweiten dem Raum der abstrakten Ovale, d. h. der ds^2 mit positiver Krümmung, die a priori auf der Kugel vorgegeben sind. Diese beiden Räume sind nicht linear, aber im kleinen durch Linearräume darstellbar, und dies gestattet dem Verf., seine allgemeine Theorie der Inversion von Funktionaltransformationen (vgl. dies. Zbl. 16, 361) anzuwenden. — Der Hauptteil der Arbeit ist der Untersuchung der lokalen Umkehrung der Transformationen gewidmet; diese hängt mit der Integration einer schon von Weyl gefundenen partiellen Differentialgleichung zusammen, die die Weingartensche Gleichung für die infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche verallgemeinert. Für die Behandlung dieser Gleichung sind die vom Verf. in der Theorie der elliptischen partiellen Differentialgleichungen früher erhaltenen Ergebnisse (dies. Zbl. 8, 66, 67; 9, 68; 13, 164) grundlegend. — Die Voraussetzungen für den bewiesenen Existenzsatz bestehen darin, daß die Koeffizienten des vorgegebenen ds^2 stetige vierte Ableitungen bezüglich der Parameter jeder ebenen analytischen Darstellung eines Kugelteles besitzen sollen. Die Aufgabe war schon von Weyl im Jahre 1916 (Vjschr. naturforsch. Ges. 61) gestellt und unvollständig behandelt worden; unter der Beschränkung auf analytische Daten und in nicht ganz erschöpfender Weise wurde sie dann neuerdings von H. Lewy (dies. Zbl. 18, 88) erledigt.

C. Miranda (Torino).

Balanat, Manuel: Généralisation de quelques formules de géométrie intégrale. C. R. Acad. Sci., Paris 210, 596—598 (1940).

Es werden die einfachsten Formeln der Integralgeometrie in naheliegender Weise auf meßbare Punktmengen verallgemeinert.

Blaschke (Hamburg).

Santaló, L. A.: Sur quelques problèmes de probabilités géométriques. Tôhoku Math. J. 47, 159—171 (1940).

In Anlehnung an Buffons Nadelproblem bestimmt Verf. die Wahrscheinlichkeit, daß eine auf eine Ebene „geworfene“ Strecke eine in dieser Ebene gezeichnete Figur trifft, die stets die Translationsgruppe eines schiefwinkligen Gitters gestattet. Die betrachteten Fälle sind: a) kongruente Kreise, die sich nicht treffen, um die Gitterpunkte; b) Begrenzungen einer Parallelogrammpflasterung der Ebene, die Parallelogramme sind entweder die Gitterparallelogramme, oder die Zeilen sind ziegelbauartig gegeneinander verschoben; c) drei Scharen von Parallelen, die die Ebene in gleichseitige Dreiecke teilen; d) Begrenzungen einer Pflasterung der Ebene durch regelmäßige Sechsecke. — Stets wird die Länge der Strecke so eingeschränkt, daß die Anzahl der Schnittpunkte eine vorgegebene Höchstzahl nicht überschreiten kann.

Bol (Freiburg).

Topologie:

Kaplan, Wilfred: Regular curve-families filling the plane. 1. Duke math. J. 7, 154—185 (1940).

In einer Ebene E sei ein System F von Kurven f gegeben (Kurve hier topologisches Bild einer abgeschlossenen, offenen, halboffenen Strecke oder einer Kreislinie). F überdecke eine offene Menge G von E schlicht. F sei regulär, d. h. ist P ein Punkt von G , so existiert eine Umgebung U von P und eine topologische Abbildung von U auf ein Quadrat $|x| \leq a$, $|y| \leq a$ derart, daß für jede Kurve f aus F mit $f \cdot U \neq \emptyset$ das Bild von $f \cdot U$ die Strecke $y = c$ ist. Auf diese allgemeinen, rein topologisch definierten Kurvenfamilien werden bekannte Sätze von Bendixson über Kurvenfamilien, die durch Differentialgleichungen definiert sind, verallgemeinert und damit als rein topologisch erkannt (z. B.: eine geschlossene Kurve umschließt eine Singularität; eine nicht-geschlossene Kurve, die in einer Richtung beschränkt ist, ohne sich einer Singularität zu nähern, ist Asymptote an eine geschlossene Kurve; Diskussion der Umgebung einer Kurve). Von jetzt an sei $G = E$. Dann ist jedes f homöomorph zu einer Geraden und strebt in beiden Richtungen gegen Unendlich. Die Struktur jeder solchen Familie kann auf algebraische Art formuliert werden, und zwar ist sie eindeutig bestimmt durch die relative Lage je dreier Kurven der Familie; von diesen Lagen gibt es im wesentlichen zwei Typen. F kann zerlegt werden in fremde Teilfamilien, von denen jede die Struktur der Geraden einer Halbebene hat. Dies führt zum Beweis des Hauptsatzes: es existiert eine stetige, in ganz E definierte Funktion $h(x, y)$ derart, daß für jedes c die Menge $[h(x, y) = c]$ Summe von höchstens abzählbar vielen Kurven von F ist.

Nöbeling (Erlangen).

Mayer, W.: A new approach to the critical value theory. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 838—847 (1940).

Die Ungleichungen von Morse werden auf neue Weise abgeleitet, und zwar im wesentlichen unter Verwendung der Rangbeziehungen zwischen den Bettigruppen ineinander geschachtelter topologischer Gruppensysteme.

K. Reidemeister.

Betz, Ebon E.: Accessibility and separation by simple closed curves. Amer. J. Math. 63, 127—135 (1941).

Es sei M ein lokal zusammenhängendes Kontinuum mit folgender Eigenschaft: das Komplement in M von jedem topologischen Kreisbild $\subset M$ besteht aus mindestens zwei, jedoch höchstens endlich vielen Komponenten. Ist dann K ein topologisches Kreisbild $\subset M$ und D eine Komponente von $M - K$, so ist jeder Punkt p der Begrenzung $\bar{D} - D$ regulär erreichbar von D aus (d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß jeder Punkt von D , der von p einen Abstand $< \delta$ hat, mit p durch einen Bogen mit einem Durchmesser $< \varepsilon$ verbunden ist, welcher bis auf den Punkt p in D enthalten ist). Wird das lokal zusammenhängende Kontinuum M durch kein Punktepaaar zerlegt (separated) und besteht das Komplement in M von jedem topologischen Kreisbild aus genau zwei Komponenten, so ist M eine einfache geschlossene Fläche (topologisches Bild der Kugelfläche).

Nöbeling (Erlangen).

Smith, P. A.: Fixed-point theorems for periodic transformations. Amer. J. Math. 63, 1—8 (1941).

Früher (dies Zbl. 9, 411) hat Verf. die Existenz von Fixpunkten für endlich-periodische, topologische Selbstabbildungen einer Teilmenge T des n -dimensionalen euklidischen Raumes nachgewiesen, falls alle singulären Sphären von der Dimension $pn - n - 1$ nullhomotop in T sind. Verf. berichtet, daß hierbei der Primzahlcharakter der Periode p vorausgesetzt war, stellt aber jetzt mit ganz anderen Methoden fest, daß der Satz auch für Primzahlpotenzen als Periode gilt und daß man auch einen endlichdimensionalen, lokal-bikompakten Hausdorffschen Raum, der azyklisch mod der Primzahl ist, statt T zugrunde legen darf. — Ist die Periode eine Primzahl, so ist die Menge der Fixpunkte ebenfalls azyklisch nach diesem Modul. — Für eine Periode

beliebiger Art existieren Fixpunkte, wenn es sich um den euklidischen, 3-dimensionalen Gesamtraum handelt, und eine solche Aussage gilt auch noch beim 4-dimensionalen euklidischen Gesamtraum, falls man weiß, daß es sich um reguläre Transformationen handelt, d. h. um solche Transformationen (in einem lokaleuklidischen Raum), deren Fixpunkt mengen lokaleuklidisch sind.

R. Furch (Rostock).

Harrold jr., O. G.: Exactly (\neq 1) transformations on connected linear graphs. Amer. J. Math. 62, 823—834 (1940).

In sehr engem Anschluß an eine frühere Note des Verf. (dies. Zbl. 22, 410) werden kurventheoretische Ergebnisse von bemerkenswerter Allgemeinheit über eindeutig stetige Abbildungen, deren Inverse genau k -deutig sind, gewonnen. Beständige Regularität (s. Menger, Kurventheorie, Leipzig u. Berlin 1932; dies. Zbl. 5, 415) bleibt erhalten und umgekehrt: entsteht aus einem Kontinuum eine beständig reguläre Kurve, so war das Kontinuum beständig regulär. Ist $k > 1$, so kann aus keinem Kontinuum ein Bogen entstehen. — Derartige Ergebnisse werden angewandt auf die Abbildungen von Graphen. Während bei allgemeinem k aus einem zusammenhängenden Graphen nicht notwendig wieder ein Graph zu entstehen braucht (Beispiel wird gegeben), bleibt für $k = 2$ der Charakter als zusammenhängender Graph erhalten. Dann läßt sich die Abbildung des einen Graphen auf den andern sogar simplizial darstellen, d. h. so, daß nach geeigneter Unterteilung der beiden Graphen die einzelnen Strecken als ganze Strecken kombinatorisch aufeinander bezogen werden. Ist der Ausgangsgraph eine einfache, geschlossene Kurve, so auch der Bildgraph (wieder bei $k = 2$), und dieser wird entweder zweimal in gleichem Sinn durchlaufen oder einmal positiv und einmal negativ.

R. Furch (Rostock).

Eilenberg, Samuel: On continuous mappings of manifolds into spheres. Ann. of Math., II. s. 41, 662—673 (1940).

Es werden stetige Abbildungen $(n + 1)$ -dimensionaler Mannigfaltigkeiten M^{n+1} auf niederdimensionale Sphären S^{m+1} betrachtet. In Verallgemeinerung einer bekannten, von H. Hopf bei der Untersuchung von Abbildungen von Sphären auf niederdimensionale Sphären (dies. Zbl. 12, 319) benutzten Methode wird einer solchen Abbildung f eine $(n - m)$ -dimensionale Homologiekategorie $\Gamma(f)$ und im Falle $n = 2m$, $\Gamma(f) = 0$ eine Verschlingungszahl $c(f)$ als Invariante bei Deformationen der Abbildung zugeordnet. Die Eigenschaften von $\Gamma(f)$ (im Falle $m < n < 2m$) und $c(f)$ (im Falle $n = 2m$) werden unter schrittweiser Verengung der Voraussetzungen untersucht. Der wichtigste Spezialfall ist der, daß auch M^{n+1} eine Sphäre ist. Dann wird, in umgekehrter Richtung wie bei Hopf, von der Existenz einer Abbildung von S^{2m+1} auf S^{m+1} auf die Existenz einer Abbildung des Produktes $S^m \times S^m$ auf S^m mit gewissen Eigenschaften geschlossen. Unter Benutzung eines Resultates von H. Freudenthal (dies. Zbl. 20, 408) wird gezeigt, daß bei ungeradem m stets solche Abbildungen existieren, bei denen die beiden Komponenten des Produkts mit vorgegebenen Geraden auf S^m abgebildet werden.

Wolfgang Franz (Frankfurt a. M.).

Dunford, Nelson: On continuous mapping. Ann. of Math., II. s. 41, 639—661 (1940).

Sei X ein metrischer Raum und f eine Abbildung von X auf den Hausdorffschen Raum X_1 . Nach Aufstellung mehrerer Sätze über Summen nirgends dichter Mengen, bei deren Beweis das Auswahlaxiom ausgiebig benutzt wird, kommt Verf. zu seinem Hauptresultat: Ist X lokal separabel und vollständig, die Abbildung f eineindeutig und stetig, wird ferner kein nicht leerer, offener Teil von X auf eine nirgends dichte Teilmenge des Bildraumes X_1 abgebildet, so gilt für das Bild jeder nicht leeren, offenen Menge G aus X die Beziehung $f(G) = G_1 + E_1$, wo G_1 ein nicht leerer, offener Teil, und E_1 ein nirgends dichter, in $f(G)$ abgeschlossener Teil von X_1 ist. Die Bedingung der Eineindeutigkeit von f läßt sich durch eine schwächere, vom Verf. als Distributivität bezeichnete Forderung ersetzen. Von den Anwendungen sei folgender Satz hervorgehoben: Ist X eine lokal separable und vollständige Gruppe mit einer einseitig in-

varianten Metrik, X_1 eine Hausdorffsche Gruppe, ist ferner f eine stetige additive Funktion mit dem Bereich X und Bildbereich X_1 , und sind die Bilder der Sphären nicht nirgends dicht, so ist f eine innere Abbildung, d. h. die Bilder der offenen Mengen sind offen.

G. Alexits (Budapest).

Jones, F. B.: Almost cyclic elements and simple links of a continuous curve. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 775—783 (1940).

Die Theorie der im kleinen zusammenhängenden Kontinua ist, besonders hinsichtlich der zyklischen Elemente, weithin auf die Annahme der lokalen Kompaktheit dieser Kontinua gegründet. Diese Voraussetzung wird hier fallengelassen. Es zeigt sich, daß sehr viele Ergebnisse ihr Analogon finden, wenn statt des Begriffs „maximal-zyklisches Teilkontinuum“ der allgemeinere Begriff des (nichtabgeschlossenen) „zyklischen Kerns“ und statt des „zyklischen Elements“ das „fastzyklische Element“ eingeführt wird. — Zur raschen Erfassung des Textes ist es dienlich, der Note etwa folgendes Beispiel zuzufügen: Der zugrunde gelegte „vollständige Mooresche Raum“, in welchem die Axiome 0 und 1 der „Foundations of point set theory“ von R. L. Moore (siehe dies. Zbl. 5, 54) gelten, der zugleich das im kleinen zusammenhängende Kontinuum darstellt, werde gebildet von den Punkten aller Ursprungsreise einer Ebene mit Radius $r = 1 - \frac{1}{n}$ (n ganz) zuzüglich der Punkte eines abgeschlossenen Durchmessers des Einheitskreises. Wegnahme der beiden Durchmesserendpunkte von diesem, aus einem fastzyklischen Element bestehenden Kontinuum gibt den zyklischen Kern. — Fügt man den Axiomen 0 und 1 noch das Axiom 2 und den Jordankurvensatz (als Axiom 4) zu, so bedeutet das Mooresche Axiom 3 die Beschränkung auf Räume mit einem fastzyklischen Element.

R. Furch (Rostock).

Cohen, L. W.: On topological completeness. Bull. Amer. Math. Soc. 46, 706—710 (1940).

Verf. hat schon früher einen Typus von Umgebungsräumen definiert (dies. Zbl. 20, 409), auf die der metrische Begriff der Vollständigkeit übertragen werden kann. Ein ähnlicher, jedoch speziellerer Raumtypus wurde von A. Weyl definiert (dies. Zbl. 19, 186). Die im Cohenschen Sinn bzw. Weylschen Sinn vollständigen Räume sollen C - bzw. W -vollständig genannt werden. Das Hauptresultat des Verf. besteht darin, daß der von ihm früher definierte C -vollständige Raum R^* , in welchem ein zu seinem Typus gehöriger Raum als dichter Teil topologisch enthalten ist, nicht nur — wie es schon früher gezeigt wurde — C -vollständig ist, sondern auch die speziellere Eigenschaft, W -vollständig zu sein, besitzt.

G. Alexits (Budapest).

Eilenberg, Samuel: Ordered topological spaces. Amer. J. Math. 63, 39—45 (1941).

Es sei X ein topologischer Raum, d. h. ein Umgebungsraum, welcher den ersten drei Axiomen von Hausdorff genügt. Er heißt geordnet, wenn in X eine Relation $<$ definiert ist, die folgenden drei Axiomen genügt: 1) für je zwei Punkte $x, y \in X$ besteht genau eine der drei Relationen $x < y$, $x = y$, $y < x$; 2) aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$; 3) ist $x < y$, so existiert eine Umgebung $U(x)$ von x und eine Umgebung $U(y)$ von y derart, daß $x < y'$ und $x' < y$ für $x' \in U(x)$ und $y' \in U(y)$ gilt. Verf. beweist folgende Sätze: In einem topologischen, geordneten Raum ist auch das vierte Axiom von Hausdorff erfüllt. Ein topologischer, zusammenhängender Raum X kann dann und nur dann geordnet werden, wenn die Menge $P(X)$ aller Punkte (x, y) mit $x \neq y$ des topologischen Produktes $X \times X$ nicht zusammenhängend ist. Zwei Ordnungen eines topologischen, zusammenhängenden Raumes X sind entweder identisch oder entgegengesetzt. Ein zusammenhängender, lokal zusammenhängender, separabler, topologischer Raum X ist mit einer Teilmenge einer Geraden dann und nur dann homöomorph, wenn $P(X)$ nicht zusammenhängend ist. Schließlich betrachtet Verf. das System aller Topologisierungen einer geordneten Menge, welche sie zu einem geordneten, topologischen Raum machen.

Nöbeling (Erlangen).